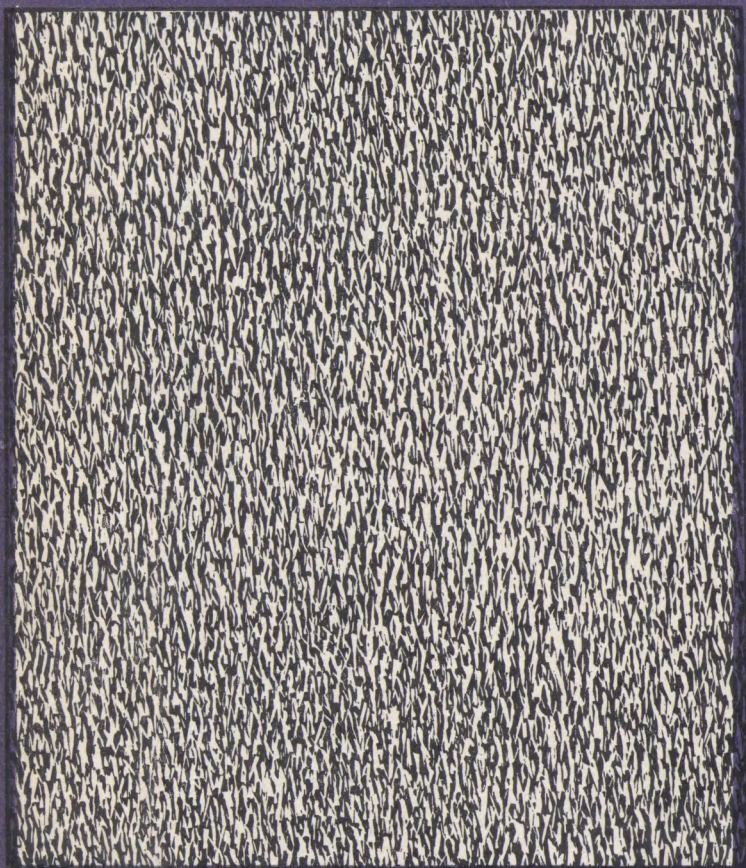


Г. В. МАРТЫНОВ

КРИТЕРИИ ОМЕГА - КВАДРАТ



Г. В. МАРТЫНОВ

КРИТЕРИИ ОМЕГА-КВАДРАТ

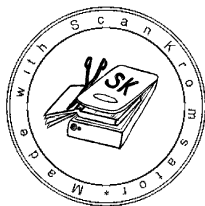


МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1978

Критерии омега-квадрат. Г. В. Мартынов.
Главная редакция физико-математической литературы
изд-ва «Наука», М., 1978, стр. 80.

В книге описаны критерии типа омега-квадрат, предназначенные для проверки гипотез о принадлежности функции распределения наблюдаемой одномерной или многомерной случайной величины различным классам функций распределения, и изложены относящиеся сюда методы вычисления функций распределения квадратичных форм от нормальных случайных величин. В приложении помещены таблицы функций распределения рассматриваемых статистик, позволяющие проводить практические расчеты согласия гипотез.

Книга доступна инженерам и научным работникам, занимающимся приложениями математической статистики.



Scan AAW

Предисловие	5
Глава 1. Статистики ω_n^2 общего вида	9
§ 1. Предельные распределения статистик ω_n	9
§ 2. Критерий χ^2	16
§ 3. Критерий гауссовости мер в гильбертовом пространстве	17
Глава 2. Конкретные статистики ω_n^2	20
§ 1. Одновыборочные критерии. Простая гипотеза	20
§ 2. Проверка сложной гипотезы в одномерном случае	27
§ 3. Критерии нормальности	33
§ 4. Критерий экспоненциальности	38
§ 5. Многомерные критерии. Простая гипотеза	38
§ 6. Многовыборочные критерии	42
§ 7. Критерий симметрии	44
§ 8. Критерии независимости	46
§ 9. Критерии для круговых распределений	49
Глава 3. Распределение ω^2	51
§ 1. Общие сведения	51
§ 2. Формула Смирнова	54
§ 3. Формула Смирнова для бесконечных квадратичных форм	56
§ 4. Квадратичные формы с двукратными коэффициентами	58
§ 5. Квадратичные формы общего вида	59
Приложение. Таблицы предельных функций распределения статистик ω_n^2	63
Таблица 1. Критерий Смирнова W^2	63
Таблица 2. Критерий Андерсона — Дарлинга A^2	64
Таблица 3. Критерий ω^2 нормальности при неизвестном математическом ожидании	65
Таблица 4. Критерий ω^2 нормальности при неизвестной дисперсии	65
Таблица 5. Критерий ω^2 нормальности при двух неизвестных параметрах	66

Т а б л и ц а	6. Критерий ω^2 симметрии	67
Т а б л и ц а	7. Критерий ω^2 равномерности распределе- ния в единичном квадрате	67
Т а б л и ц а	8. Критерий ω^2 равномерности распределе- ния в единичном кубе	68
Т а б л и ц а	9. Критерий ω^2 независимости двух случай- ных величин	69
Т а б л и ц а	10. Критерий ω^2 независимости трех случай- ных величин	69
Т а б л и ц а	11. Критерий Ватсона U^2	70
Т а б л и ц а	12. Квантили критериев ω^2	71
Л и т е р а т у р а	72

В различных задачах, относящихся к приложениям математической статистики, возникает необходимость в проверке гипотезы о совпадении функции распределения наблюдаемой случайной величины с некоторой заданной функцией распределения или о принадлежности ее некоторому семейству, когда альтернативное распределение неизвестно. Иногда возникает необходимость в проверке гипотезы о совпадении распределений в двух или более выборках.

К таким задачам можно отнести, например, задачу проверки качества генератора случайных чисел, задачу проверки гипотезы о независимости нескольких случайных величин с неизвестными функциями распределения. Упомянем также задачу проверки гипотез об угловых распределениях на окружности, сфере и т. д., возникающие, например, при балансировке вращающихся масс, изучении распределения положений солнечных пятен.

Описанные гипотезы могут проверяться с использованием различных типов критериев: критерия Колмогорова — Смирнова, критерия Пирсона χ^2 , критерия Крамера — Мизеса — Смирнова ω^2 и других. В этой книге рассматривается критерий ω^2 , теория которого разработана для проверки широкого класса гипотез.

Критерий ω^2 в простейшем случае основан на статистике

$$\omega_n^2 = n \int_{-\infty}^{\infty} \psi(G(x)) (F_n(x) - G(x))^2 dG(x), \quad (1)$$

где $F_n(x)$ — эмпирическая функция распределения, $\psi(t)$, $t \in (0, 1)$, — некоторая весовая функция. Эмпи-

рическая функция распределения строится по n наблюдениям случайной величины с функцией распределения $F(x)$. Предполагается, что проверяется простая гипотеза $H_0: F(x) \equiv G(x)$. Распределение $G(x)$ обычно выбирается на основании математической модели физического явления, определяющего характеристики наблюдаемой случайной величины.

Статистики вида, близкого к (1), впервые рассматривали Крамер (1928) и Мизес (1931). Окончательный вид по предложению В. И. Гливленко они приобрели в работах Н. В. Смирнова (1936, 1937), в результате чего распределение статистики ω_n^2 оказалось не зависящим от распределения $G(x)$ в предположении, что $G(x)$ принадлежит классу непрерывных распределений. Н. В. Смирнов исследовал статистику ω_n^2 при произвольных весовых функциях $\psi(t)$, а при $\psi(t) \equiv 1$ вывел формулу, удобную для вычисления ее предельного распределения. В этой книге критерий ω^2 при $\psi(t) \equiv 1$ будет называться критерием Смирнова и обозначаться через W^2 . Известна также статистика Андерсона — Дарлингса A^2 , соответствующая статистике (1) при $\psi(t) = [t(1-t)]^{-1}$. К настоящему времени статистика ω_n^2 обобщена на случаи, когда $G(x)$ содержит оцениваемые параметры (сложная гипотеза), а также применяется для проверки гипотез о круговых распределениях, гипотезы независимости, симметрии, о многомерных распределениях и т. д.

Возможность применения статистики ω_n^2 для проверки гипотезы H_0 объясняется тем, что в соответствии с леммой Гливленко — Кантелли $F_n(x)$ равномерно сходится к функции распределения $F(x)$ в случае ее непрерывности. Оказывается, что при H_0 и некоторых ограничениях на $\psi(t)$ множитель n , стоящий перед интегралом в (1), обеспечивает сходимость распределения ω_n^2 при $n \rightarrow \infty$ к некоторому невырожденному распределению, совпадающему с распределением случайных величин вида

$$\int_0^1 \xi^2(t) dt, \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i^2}{\lambda_i}.$$

где $\xi(t)$ — гауссовский случайный процесс с некоторой корреляционной функцией $K(t, \tau)$, $\{x_i\}$ — независимые стандартные нормальные случайные величины, λ_i — собственные значения линейного интегрального оператора с ядром $K(t, \tau)$ (корреляционного оператора). Характеристическая функция предельного распределения статистики ω_n^2 есть

$$\varphi(t) = (D(2it))^{-1/2} = \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{2it}{\lambda_j}\right)^{-1/2},$$

где $D(\lambda)$ — определитель Фредгольма ядра $K(t, \tau)$.

При фиксированных альтернативных распределениях ($F(x) \neq G(x)$) значение статистики ω_n^2 , если $n \rightarrow \infty$, с вероятностью 1 неограниченно возрастает. Это позволяет при заданном уровне значимости отвергнуть гипотезу H_0 при достаточно больших n с любой заданной мощностью. Это относится и к тем случаям, когда $G(x)$ лишь приближенно является функцией распределения наблюдаемой случайной величины. При этом может оказаться необходимым произвести дополнительный анализ с целью выяснить, насколько сильно отличается реальное распределение от гипотетического.

В первой главе кратко рассмотрены условия существования при H_0 предельного распределения статистики ω_n^2 общего вида, включающего рассматриваемые во второй главе частные случаи. В рассматриваемый общий класс критериев ω^2 входит и критерий χ^2 . Приведен пример критерия гауссовости случайного процесса.

Во второй главе рассмотрены предельные распределения ряда критериев ω^2 для проверки простых и сложных гипотез в одномерном и многомерном случаях, многовыборочные критерии, критерии симметрии, независимости, критерий равномерности угловых распределений. Рассмотрена главным образом предельная теория статистик типа ω_n^2 при H_0 . Данные о мощности критериев при конкретных альтернативах, полученные в основном по методу Монте-Карло, можно найти, например, в работах Шапиро, Уилка, Чена (1968), Стивенса (1974а), Дёрбина, Нотта и Тейлора

(1975). Примеры применения критериев Смирнова и Андерсона — Дарлингга содержатся в книге Кокса и Льюиса (1969).

Третья глава посвящена методам вычисления функций распределения квадратичных форм от нормальных случайных величин. Эти распределения по аналогии с распределением χ^2 составляют класс распределений ω^2 , включающий в качестве частного случая и класс распределений χ^2 . Методы вычисления распределения ω^2 представляют интерес не только в связи с критерием ω^2 , но оказываются полезными и для других разделов математической статистики.

В приложении помещены таблицы предельных распределений для критериев, рассмотренных во второй главе. Все таблицы были рассчитаны заново, некоторые публикуются впервые. Специально проверены те точки в таблицах, в которых наблюдаются различия с опубликованными ранее таблицами.

Большинство результатов приводится лишь с краткими указаниями к их доказательству. Читатели, интересующиеся только практикой проверки гипотез с помощью критериев ω^2 , могут ограничиться знакомством с материалом второй главы. В ней, помимо интегральных выражений типа (1) для статистик ω_n^2 , удобных при анализе их свойств, приведены более простые формулы, предназначенные для практического вычисления их значений. В качестве введения в практику применения критерия ω^2 можно использовать курс Н. В. Смирнова и И. В. Дунина-Барковского (1965).

Автор выражает глубокую благодарность Л. Н. Большеву и Н. Н. Ченцову, по инициативе и при поддержке которых написана эта книга. Им и Д. М. Чибисову автор благодарен за ряд полезных критических замечаний. Автор благодарит также Н. М. Зубову за проведение некоторых вычислений.

СТАТИСТИКИ ω_n^2 ОБЩЕГО ВИДА§ 1. Предельные распределения статистик ω_n^2

Пусть в вероятностном пространстве $(X, \mathfrak{A}, \varphi)$ производятся n наблюдений X_1, X_2, \dots, X_n ($X_i \in X$, $i = 1, \dots, n$) случайной величины (случайного элемента), причем мера φ , вообще говоря, неизвестна. Будем рассматривать задачу проверки простой гипотезы $H_0: \varphi = P$, где P — заданная вероятностная мера, или более общую задачу о проверке сложной гипотезы $H_0: \varphi \in \mathcal{P}$, где \mathcal{P} — семейство вероятностных мер $\mathcal{P} = \{P_\theta, \theta \in \Theta\}$, Θ — некоторое множество в пространстве R^h .

Если $X = R^s$, \mathfrak{A} есть σ -алгебра борелевских множеств в R^s , и $F(x)$, $x \in R^s$, — s -мерная функция распределения, соответствующая мере φ , то задачи о проверке указанных выше простой и сложной гипотез сводятся к задачам проверки гипотез соответственно $H_0: F(x) = G(x)$ и $H_0: F(x) \in \mathcal{G}$, где $G(x)$ — функция распределения, соответствующая мере P , а \mathcal{G} — семейство функций распределения $G(x, \theta)$, соответствующих мерам P_θ , $\theta \in \Theta$. В таких случаях статистика ω_n^2 для проверки сложной гипотезы обычно задается следующим интегралом Стильеса

$$\omega_n^2 = n \int_{R^s} \psi^2(G(x, \theta_n)) [F_n(x) - G(x, \theta_n)]^2 dG(x, \theta_n), \quad (1)$$

где θ_n — некоторая оценка параметра θ , а $F_n(x)$ — эмпирическая функция распределения.

Статистика (1) может быть обобщена с целью сделать ее пригодной для проверки гипотез о мерах в некоторых вероятностных пространствах общего вида $(X, \mathfrak{A}, \varphi)$. Введем класс множеств $\mathcal{B} \subset \mathfrak{A}$ и измеримое

пространство (Y, \mathfrak{B}) такие, что каждому элементу $y \in Y$ соответствует множество $B_y \in \mathfrak{B}$.

Определение 1. Функция $F(y) = \varphi(B_y)$, $y \in Y$, при условии, что она измерима в (Y, \mathfrak{B}) , называется *функцией распределения относительно \mathfrak{B}* случайной величины (случайного элемента) в $(X, \mathfrak{A}, \varphi)$.

Примером служит обычная функция распределения в R^s , если взять $Y = X = R^s$, $B_x = \{z \in R^s: z_1 < x_1, \dots, z_s < x_s\}$, $x = (x_1, \dots, x_s) \in R^s$. Выбирая другие классы множеств \mathfrak{B} , можно построить и другие функции распределения в R^s .

Определение 2. *Эмпирической мерой φ_n* называется мера, построенная по выборке X_1, \dots, X_n из $(X, \mathfrak{A}, \varphi)$, которая для любого множества из \mathfrak{A} равна отношению числа наблюдений, попавших в это множество, к общему числу наблюдений.

Определение 3. *Эмпирической функцией распределения относительно семейства \mathfrak{B}* называется функция $F_n(y) = \varphi_n(B_y)$ при условии, что она измерима относительно (Y, \mathfrak{B}) .

Таким образом,

$$F_n(y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \chi(X_i, B_y),$$

где $\chi(X_i, A) = 1$, если $X_i \in A$, и $\chi(X_i, A) = 0$ в противном случае.

Если $(Y, \mathfrak{B}) = (X, \mathfrak{A})$, то эмпирическая функция распределения измерима, так как она является простой функцией.

Пусть на (Y, \mathfrak{B}) задано семейство мер $\Gamma = \{\gamma_\theta, \theta \in \Theta\}$. Статистику ω_n^2 в общем случае определим следующим образом:

$$\omega_n^2 = n \int_Y \psi^2(G(y, \theta_n)) [F_n(y) - G(y, \theta_n)]^2 d\gamma_{\theta_n}.$$

Семейство мер Γ должно быть выбрано так, чтобы влияние неизвестного параметра θ на распределение статистики ω_n^2 было минимальным. Если $(Y, \mathfrak{B}) = (X, \mathfrak{A})$, то в качестве семейства Γ удобно выбрать

семейство мер \mathcal{P} и статистика ω_n^2 примет вид

$$\omega_n^2 = n \int_X \psi^2(G(x, \theta_n)) [F_n(x) - G(x, \theta_n)]^2 dP_{\theta_n}. \quad (2)$$

В дальнейшем везде считаем, что $(Y, \mathfrak{B}) = (X, \mathfrak{A})$, хотя результаты этого параграфа очевидным образом распространяются и на более общий случай. Иногда рассматриваются усеченные статистики ω_n^2 , такие, что интегрирование в (2) ведется по подмножеству из X .

Если множество \mathcal{B} выбрано так, что мера μ однозначно восстанавливается по ее значениям на множествах из \mathcal{B} , то в достаточно регулярных случаях критерий ω^2 оказывается состоятельным. В частности, в § 3 рассмотрен пример статистики ω_n^2 общего вида, которая может применяться для проверки гипотезы о гауссовости случайных процессов и полей.

Когда проверяется простая гипотеза, статистика ω_n^2 имеет вид

$$\omega_n^2 = n \int_X [F_n(x) - G(x)]^2 d\mu, \quad (3)$$

где μ — мера, включающая в себя и весовую функцию. Поскольку выбор семейства \mathcal{B} неоднозначен, свойства введенной статистики будут зависеть от \mathcal{B} .

Выясним условия, при которых функция распределения статистики ω_n^2 слабо сходится к некоторой функции распределения. Рассмотрим случайный процесс

$$s_n(x) = \sqrt{n} \tau(x, \theta_n) [F_n(x) - G(x, \theta_n)],$$

где $\tau^2(x, \theta_n) = \psi^2(G(x, \theta_n)) dP_{\theta_n}/dP_0$, $P_0 = P_{\theta_0}$, как случайный элемент пространства $L_2(X, \mathfrak{A}, P_0)$, являющегося сепарабельным гильбертовым пространством. Статистика ω_n^2 принимает вид $\omega_n^2 = \|s_n(x)\|^2$.

Будем использовать следующие обозначения для производных функции $f(y)$ по векторной переменной $y = (y_1, \dots, y_k)$:

$$\frac{df(y)}{dy} = \left(\frac{\partial f(y)}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial f(y)}{\partial y_k} \right)'.$$

Обозначим

$$\frac{\partial G(x, \theta)}{\partial \theta} = q(x, \theta) \equiv (q_1(x, \theta), \dots, q_k(x, \theta))',$$

$$\frac{\partial^2 G(x, \theta)}{\partial \theta^2} = \left(\frac{\partial^2 G(x, \theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right) \equiv (l_{ij}(x, \theta)) = L(x, \theta),$$

$$t(x, \theta) = \frac{\partial \tau(x, \theta)}{\partial \theta}.$$

Введем некоторые предположения относительно оценки θ_n . Пусть она при всех $\theta_0 \in \Theta$ может быть представлена в виде

$$\sqrt{n}(\theta_n - \theta_0) = (1/\sqrt{n}) \sum_{i=1}^n h(X_i, \theta_0) + R_n, \quad (4)$$

где $|R_n| \rightarrow 0$ по вероятности P_0 , соответствующей нулевой гипотезе, $h(x, \theta) = (h_1(x, \theta), \dots, h_k(x, \theta))'$,

$$E_0 h(x, \theta_0) = 0, \quad (5)$$

$$E_0 h(x, \theta_0) h(x, \theta_0)' = B(\theta_0), \quad (6)$$

где $B(\theta_0)$ — положительно определенная матрица.

Введем процесс $z_n(x) = \tau(x, \theta_0) \xi_n(x)$, где

$$\xi_n(x) = \sqrt{n} \left[F_n(x) - G(x, \theta_0) - \frac{1}{n} q(x, \theta_0)' \sum_{i=1}^n h(X_i, \theta_0) \right],$$

и семейство функций $\mathcal{D}(\theta_0)$, такое, что для каждой функции $\kappa(x) \in \mathcal{D}(\theta_0)$ имеет место слабая сходимость последовательности мер ν_n , порождаемых процессом $\kappa(x) \xi_n(x)$ в L_2 с σ -алгеброй борелевских множеств \mathfrak{B} . Выведем достаточные условия принадлежности $\kappa(x)$ семейству $\mathcal{D}(\theta_0)$. Рассматривая $\kappa(x) \xi_n(x)$ как случайный элемент в (L_2, \mathfrak{B}) , представим его в виде

$$\kappa(x) \xi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \xi_i,$$

где $\xi_i = \kappa(x) [\chi(X_i, B_x) - G(x, \theta_0) - q(x, \theta_0)' h(X_i, \theta_0)]$, ξ_i — независимые одинаково распределенные случайные элементы в (L_2, \mathfrak{B}) , причем $E \xi_i = 0$. Для слабой сходимости $\kappa(x) \xi_n(x)$ в (L_2, \mathfrak{B}) достаточно, чтобы

$E \|\xi_t\|^2 < \infty$ (см. Прохоров, 1956; Канделаки и Сазонов, 1964). Это условие эквивалентно условию

$$\int_X \kappa^2(x) \{[G(x, \theta_0) - G^2(x, \theta_0)] + 2q(x, \theta_0)' v(x, \theta_0) + \\ + q(x, \theta_0)' B(\theta_0) q(x, \theta_0)\} P_0(dx) < \infty, \quad (7)$$

где $v(x, \theta_0) = \int_{B_x} h(s, \theta_0) P_0(ds)$.

Таким образом, если $\tau(x, \theta_0) \in \mathcal{D}(\theta_0)$, то процесс $z_n(x)$ слабо сходится в L_2 к гауссовскому процессу $z(x)$ с характеристическим функционалом

$$T(f) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} (Rf, f) \right\}, \quad f \in L_2,$$

(\cdot, \cdot) — скалярное произведение в L_2 , R — корреляционный оператор, связанный с корреляционной функцией $K(x, s) = E \xi_1(x) \xi_1(s)$, $x, s \in X$, соотношением

$$Rf(x) = \int_X K(x, s) f(s) P_0(ds). \quad (8)$$

Корреляционная функция имеет вид

$$K(x, s) = \tau(x, \theta_0) \tau(s, \theta_0) [P_0(B_x \cap B_s) - \\ - G(x, \theta_0) G(s, \theta_0) - q(s, \theta_0)' v(x, \theta_0) - \\ - q(x, \theta_0)' v(s, \theta_0) + q(x, \theta_0)' B(\theta_0) q(s, \theta_0)]. \quad (9)$$

Рассмотрим статистики вида (3) для проверки простой гипотезы $H_0: \varphi = P$. Из полученных результатов следует, что справедлива

Теорема 1. Если $\mu \ll P$, $\psi(x) = d\mu/dP$ и

$$\int_X G(x) (1 - G(x)) d\mu < \infty, \quad (10)$$

то функция распределения статистики ω_n^2 вида (3) слабо сходится к функции распределения случайной величины

$$\omega^2 = \int_X \eta^2(x) dP, \quad (11)$$

где $\eta(x)$ — гауссовский процесс в $L_2(X, \mathfrak{A}, P)$ с нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией

$$K(x, s) = \psi(x) \psi(s) [P(B_x \cap B_s) - G(x) G(s)]. \quad (12)$$

Перейдем теперь к рассмотрению сходимости распределения статистики ω_n^2 при сложной гипотезе. Введем условия, необходимые в дальнейшем.

Пусть существует некоторая окрестность U точки θ_0 и функция $\kappa(x) \in \mathcal{D}(\theta_0)$ такие, что

(I) При всех i функции $t_i(x, \theta_0)/\kappa(x)$ равномерно по x ограничены.

(II) Существуют производные — элементы вектора $t(x, \theta_0)$ и матрицы $L(x, \theta_0)$ при всех x .

(III) При всех i величины $\|\tau(x, \theta) q_i(x, \theta_0)\|$ равномерно по $\theta \in U$ ограничены.

(IV) При всех i и j величины $\|\tau(x, \theta) l_{ij}(x, \theta_0)\|$ равномерно по $\theta \in U$ ограничены.

Представим $s_n(x)$ в виде $s_n(x) = z_n(x) + b_n(x)$, где

$$b_n(x) = (\bar{\theta}_n - \theta_0) t(x, \theta_0) \xi_n(x) - \tau(x, \theta_n) [\sqrt{n} (\hat{\theta}_n - \theta_0)' L(x, \theta_0) (\hat{\theta}_n - \theta_0) - R'_n q(x, \theta_0)],$$

причем $|\bar{\theta}_n - \theta_0| < |\theta_n - \theta_0|$, $|\hat{\theta}_n - \theta_0| < |\theta_n - \theta_0|$.

После простых, но громоздких выкладок нетрудно убедиться в справедливости следующих лемм:

Лемма 1. При условиях (5), (6), (I) — (IV) $\|b_n(x)\| \rightarrow 0$ по вероятности.

Лемма 2. При условиях (5), (6), (I) — (IV) $\omega_n^2 - \|z_n(x)\|^2 \rightarrow 0$ по вероятности.

Учитывая непрерывность функции распределения $\|z(x)\|^2$ (см. § 3.1), получаем из леммы 2, что предельные распределения случайных величин ω_n^2 и $\|z_n(x)\|^2$ совпадают. Таким образом, справедлива

Теорема 2. Пусть существует матрица $B(\theta_0)$, $\tau(x, \theta_0) \in \mathcal{D}(\theta_0)$ и выполнены условия (5), (6), (I) — (IV). Тогда функция распределения $\|z_n(x)\|^2$ слабо сходится к функции распределения случайной величины $\|z(x)\|^2$.

Заметим, что указанные в теореме условия (I) — (IV) могут быть несколько ослаблены,

Из определения слабой сходимости для последовательностей мер следует сходимость функций распределения для каждого непрерывного в метрике L_2 функционала от случайных процессов $z_n(x)$, а следовательно, и от $s_n(x)$.

Оператор R является линейным симметрическим неотрицательно определенным вполне непрерывным с конечным следом. Пусть α_i , $i = 1, 2, \dots$, — последовательность собственных значений оператора R , расположенная в порядке убывания, причем каждое значение α_i встречается столько раз, какова его кратность, и $\{e_i\}$ — соответствующая им последовательность собственных элементов (функций). Как известно, случайный процесс $z(x)$ с вероятностью 1 можно представить в виде

$$z(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i e_i(x),$$

где случайные величины $\xi_i = \int_X z(x) e_i(x) dP_0$, распределены нормально с нулевым математическим ожиданием и дисперсией α_i и вследствие специального выбора базиса $\{e_i\}$ независимы. Следовательно,

$$\|z(x)\|^2 = \int_X \sum_{i,j} \xi_i \xi_j e_i(x) e_j(x) dP_0 = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i^2$$

(см., например, Ибрагимов и Розанов, 1970). Таким образом, справедлива

Теорема 3. *Предельное распределение статистики ω_n^2 вида (2) при выполнении условий (5), (6), (I) — (IV) и при $\tau(x, \theta_0) \in \mathcal{D}(\theta_0)$, совпадает с распределением квадратичной формы $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i v_i^2$, где v_i^2 — независимые случайные величины со стандартным нормальным распределением, а $\{\alpha_i\}$ — собственные значения оператора R , определенного равенствами (8) и (9).*

Предельные теоремы для сумм случайных элементов в гильбертовом пространстве для исследования предельного распределения использовали Чибисов (1965), Нойхауз (1974).

§ 2. Критерий χ^2

Рассмотрим в качестве иллюстрации применение изложенной теории к критерию χ^2 в случае простой гипотезы.

Пусть \mathcal{B} состоит из конечной системы непересекающихся подмножеств X , $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \dots, B_r\} \subset \mathcal{A}$, $B_i \cap B_j = \emptyset$ при $i \neq j$, $\cup B_i = X$. Пусть отображение $X \rightarrow \mathcal{B}$ таково, что элементу x соответствует то из множеств B_i , которому он принадлежит. Такое определение приводит к тому, что построенный критерий (при фиксированном r) оказывается несостоятельным против альтернатив, при которых вероятности множеств из \mathcal{B} совпадают с их вероятностями при H_0 .

Пусть $\psi(x)$ — функция, постоянная на множествах B_i и равная на них ψ_i^2 . Тогда статистика ω_n^2 примет вид

$$\omega_n^2 = n \int_X \psi^2(x) (F_n(x) - G(x))^2 dP_0 = \sum_{i=1}^r \psi_i^2 p_i \frac{(v_{ni} - np_i)^2}{n},$$

где $v_{ni} = np_{ni}$ — частоты попадания наблюдений в B_i . Условие (1.10) при конечных ψ_i выполнено, а корреляционная функция $K(x, s) = K_{ij}$ при $x \in B_i$ и $y \in B_j$ такова:

$$K_{ij} = \psi_i^2(p_i - p_j^2), \quad K_{ij} = -\psi_i \psi_j p_i p_j, \quad i \neq j.$$

Нахождение собственных значений корреляционного оператора R сводится к нахождению собственных значений $(r \times r)$ -матрицы $C = (c_{ij}) = (K_{ij} p_j)$. Критерию χ^2 Пирсона соответствуют весовые коэффициенты $\psi_i = 1/p_i$, $i = 1, \dots, r$. Тогда характеристическое уравнение есть $\det(\delta_{ij}(1 - \lambda) - p_j) = 0$, где $\delta_{ii} = 1$ и $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$. Нетрудно заметить, что оно дает в качестве собственных значений $\lambda = 0$ с кратностью 1 и $\lambda = 1$ с кратностью $r - 1$. Таким образом, предельное распределение статистики Пирсона имеет распределение χ^2 с $r - 1$ степенью свободы. При других весовых коэффициентах распределение статистики χ^2 может быть вычислено с использованием методов, описанных в гл. 3.

§ 3. Критерий гауссовости мер в гильбертовом пространстве

Рассмотрим применение изложенной в § 1 теории к построению критерия типа ω^2 для проверки гипотезы о том, что мера φ в сепарабельном гильбертовом пространстве X с σ -алгеброй борелевских множеств \mathfrak{B} является гауссовской с нулевым математическим ожиданием и корреляционным оператором A . В частности, этот критерий может применяться для проверки гипотезы о том, что наблюдаемый на интервале $(0, 1)$ случайный процесс $s(t)$ является гауссовским с нулевым математическим ожиданием и заданной корреляционной функцией $K(t, \tau)$, причем

$$\int_0^1 K(t, t) dt < \infty.$$

Элементы x пространства X будем представлять в виде $x = (x_1, x_2, \dots)$, где x_i есть коэффициенты разложения элемента x по базису, образованному собственными элементами $\{e_i\}$ оператора A . Выберем класс множеств \mathcal{B} таким, что множества, входящие в него, есть

$$B_x = \{y = (y_1, y_2, \dots) \in X: y_i < x_i + \sigma_i \beta_i, \quad i = 1, 2, \dots\},$$

где σ_i^2 — характеристические числа корреляционного оператора A , и $\{\beta_i\}$ — некоторая последовательность чисел, $\beta_i > 0$. Заметим, что минимальная σ -алгебра, содержащая \mathcal{B} , совпадает с \mathfrak{B} , и мера в (X, \mathfrak{B}) однозначно восстанавливается по своим значениям на множествах из \mathcal{B} .

Ввиду независимости случайных величин x_i , $i = 1, 2, \dots$, функция распределения относительно семейства \mathcal{B} может быть представлена в виде

$$F(x) = \varphi(B_x) = \prod_{i=1}^{\infty} \Phi\left(\frac{x_i + \sigma_i \beta_i}{\sigma_i}\right) = \prod_{i=1}^{\infty} \Phi(v_i + \beta_i), \quad v_i = \frac{x_i}{\sigma_i}, \quad (1)$$

где $\Phi(x)$ — стандартная функция нормального распределения. Величины v_i можно рассматривать как

независимые одинаково распределенные случайные величины со стандартным нормальным распределением.

Для того чтобы функция распределения в точке x отличалась от 0, необходимо, чтобы произведение в (1) сходилось, т. е. было отлично от нуля. Тогда критерий ω^2 со статистикой вида (1.3) будет состоятельным против любой альтернативной меры, отличной от меры φ .

В соответствии с леммой Бореля — Кантелли, если существует такая последовательность чисел $\{c_i\}$, что

$$\sum_{i=1}^{\infty} (1 - \Phi(c_i)) < \infty, \quad (2)$$

то

$$\mathbf{P} \{ \limsup_i (v_i > c_i) \} = 0. \quad (3)$$

Условию (2) в силу неравенства

$$1 - \Phi(x) < \frac{\varphi(x)}{x} - \frac{\varphi(x)}{x^3},$$

где $\varphi(x) = \Phi'(x)$, удовлетворяет, например, последовательность $c_i = |\tau \ln i|^{1/2}$, $\tau > 2$. Если ряд

$$\sum_{i=1}^n (1 - \Phi(v_i + \beta_i))$$

сходится на множестве $Y \subset X$, $\varphi(Y) = 1$, то функция распределения будет отлична от 0 или 1 на этом множестве. Из (3) следует, что для каждого $\varepsilon > 0$ существует N такое, что

$$\mathbf{P} \{ \sup_{i > N} (v_i > c_i) \} > 1 - \varepsilon.$$

Следовательно, с вероятностью $1 - \varepsilon$

$$Q_N \equiv \sum_{i=N-1}^{\infty} (1 - \Phi(v_i + \beta_i)) \leq \sum_{i=N+1}^{\infty} (1 - \Phi(\beta_i - c_i)),$$

и $Q_N \rightarrow 0$ с вероятностью 1 при $N \rightarrow \infty$, если, например, $\beta_i = ac_i$, $a > 1$.

Вопрос о принадлежности наблюдаемых элементов пространства X множеству B_x решается путем разложения их в ряды по базису $\{e_i\}$. Из (1.12) при

$\psi(x) = 1$ следует, что корреляционная функция предельного процесса $\xi(t)$ есть $K(x, s) = F(z) - F(x)F(s)$, где z — точка с координатами $z_i = \min(x_i, s_i)$, $i = 1, 2, \dots$

Отметим в заключение, что практически проверка гауссовости может производиться по конечному, достаточно большому числу коэффициентов разложения элементов из X по базису $\{e_i\}$. При этом, если число наблюдений также достаточно велико, то распределение конкретной статистики аппроксимируется предельным распределением. Вопрос о нахождении предельного распределения остается открытым. Оно может быть найдено, например, по методу Монте-Карло.

Кроме того, проверка гипотезы о гауссовости при конечномерном приближении может быть произведена с использованием критериев ω^2 , описываемых в § 4 главы 2, и предназначенных для проверки гипотезы о равномерности распределения в единичном кубе в R_s . Однако в этом случае предельное по числу измерений распределение статистики не существует.

§ 1. Одновыборочные критерии. Простая гипотеза

1. Пусть заданы наблюдения X_1, X_2, \dots, X_n одномерной случайной величины с функцией распределения $F(x)$. Будем проверять гипотезу $H_0: F(x) = G(x)$, где $G(x)$ — заданная обычная функция распределения. Статистику ω_n^2 в этом случае запишем в виде

$$\omega_n^2 = n \int_{-\infty}^{\infty} \psi^2(G(x)) (F_n(x) - G(x))^2 dG(x). \quad (1)$$

Здесь $F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Delta(x - X_i)$, где

$$\Delta(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases} \quad (2)$$

Если $G(x)$ — непрерывная функция распределения, то преобразуем исходную выборку X_1, X_2, \dots, X_n к выборке t_1, t_2, \dots, t_n , где $t_i = G(X_i)$. Полученная выборка в случае справедливости гипотезы H_0 будет иметь равномерное на $[0, 1]$ распределение, а статистика ω_n^2 принимает вид

$$\omega_n^2 = n \int_0^1 \psi^2(t) (F_n(t) - t)^2 dt, \quad (3)$$

где $F_n(x)$ обозначает эмпирическую функцию распределения, построенную по выборке t_1, t_2, \dots, t_n . Распределение статистики (3), как легко видеть, не зависит от $G(x)$. В работе Петита и Стивенса (1976)

рассмотрен усеченный вариант статистики (3), в котором интегрирование ведется по подынтервалу $(0, 1)$.

Пусть $t_{(1)} \leq \dots \leq t_{(n)}$ — упорядоченная выборка t_1, \dots, t_n . При вычислении значений статистики ω_n^2 вместо (3) удобно пользоваться следующим выражением, легко получаемым из (3), (см. Андерсон и Дарлинг, 1952),

$$\omega_n^2 = n \int_0^1 (1-t^2) \psi^2(t) dt + 2 \sum_{j=1}^n \left\{ \tau_1(t_{(j)}) - \frac{2j-1}{2n} \tau_2(t_{(j)}) \right\}, \quad (4)$$

где

$$\tau_1(t) = \int_0^t s \psi^2(s) ds, \quad \tau_2(t) = \int_0^t \psi^2(s) ds.$$

Отметим два частных случая. При $\psi(t) = 1$ статистика ω_n^2 будет обозначаться через W_n^2 и называться статистикой Смирнова, а при $\psi(t) = 1/[t(1-t)]$ статистику ω_n^2 обозначим через A_n^2 . Последняя статистика называется статистикой Андерсона — Дарлинга. Значения этих статистик могут вычисляться по формулам, следующим из (4),

$$W_n^2 = \sum_{j=1}^n \left(t_{(j)} - \frac{j-(1/2)}{n} \right)^2 + \frac{1}{12n},$$

$$A_n^2 = -n - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (2j-1) [\log t_{(j)} + \log (1-t_{(n-j+1)})]. \quad (5)$$

Распределение статистики ω_n^2 сходится к предельному при условии, что

$$\int_0^1 \psi(t) t(1-t) dt < \infty, \quad (6)$$

(Чиби́сов, 1965). Предельное распределение статистики ω_n^2 совпадает с распределением случайной вели-

чины $\omega^2 = \int_0^1 \xi^2(t) dt$, где $\xi(t)$ — гауссовский процесс

с нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией $K(t, \tau) = \psi(t)\psi(\tau)(\min(t, \tau) - t\tau)$.

Собственные функции и собственные значения линейного интегрального оператора с ядром $K(t, \tau)$ при $\psi(t) = 1$ есть $\lambda_i = (\pi i)^2$ и $h_i(t) = \sqrt{2} \sin \pi i t$, $i = 1, 2, \dots$. Характеристическая функция предельного распределения статистики W_n^2 имеет вид (Смирнов, 1937)

$$\varphi_1(t) = \left[\frac{1}{\sqrt{2it}} \sin \sqrt{2it} \right]^{-1/2}.$$

В таблице 1 приведены значения функции распределения статистики W_n^2 . Вычисление этого распределения может производиться методами, описанными в главе 3.

При $\psi(t) = [t(1-t)]^{-1}$ собственные значения ядра $K(t, \tau)$ есть $1/[i(i+1)]$, и характеристическая функция статистики Андерсона — Дарлинга есть

$$\varphi_2(t) = \left[\frac{1}{-2\pi it} \cos \left(\frac{\pi}{2} \sqrt{1 + 8it} \right) \right]^{-1/2}.$$

В таблице 2 приведена функция распределения этой статистики.

2. В качестве примера критерия ω^2 , промежуточного между классическим критерием ω^2 и критерием согласия, основанном на интеграле от квадрата разности между оцененной и теоретической функциями плотности, рассмотрим следующий критерий.

Преобразуем исходную выборку к новой выборке с фиксированной теоретической обычной функцией распределения $\Phi(x)$, для простоты, с положительной плотностью при всех $x \in (-\infty, \infty)$. Выберем в качестве множеств, порождающих функцию распределения, множества $B_x = (x - \beta, x)$, $\beta > 0$, $x \in (-\infty, \infty)$. По новой функции $F(x) = \Phi(x) - \Phi(x - \beta)$ однозначно восстанавливается исходная функция распределения. Предельное распределение статистики ω_n^2 бу-

дет $\omega^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \eta^2(x) dx$, где $\eta(x)$ — гауссовский случайный процесс, корреляционная функция которого по

общей формуле (1.12) есть $K(x, s) = \psi(x)\psi(s) \times \times [P(x, s) - F(x)F(s)]$, где

$$P(x, s) = \begin{cases} \Phi(x) - \Phi(s - \beta), & s - \beta < x < s, \\ \Phi(s) - \Phi(x - \beta), & x - \beta < s < x, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

3. Обратимся к рассмотрению статистики ω_n^2 вида (1) при малых выборках. Нетрудно из геометрических соображений, используя (5), получить точное выражение для функции распределения статистики W_n^2 при $n = 2$ (Маршалл, 1958). Применение этого метода при больших значениях n затруднительно.

При малых n численное обращение характеристической функции содержится в работе Нотта (1974). При больших значениях n могут использоваться асимптотические разложения для $\varphi_n(t)$. Одно из них принадлежит Дарлингу (1960):

$$\begin{aligned} \varphi_n(t) = \\ = \varphi(t) + \frac{1}{12n} \left\{ \varphi(t) - \left(\frac{1}{3} + \frac{7}{24} \cos(h \sqrt{-2it}) \right) \varphi^3(t) - \right. \\ \left. - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{24} \cos(2h \sqrt{-2it}) \right) \varphi^5(t) \right\}, \end{aligned}$$

где $\varphi(t) = \left(\frac{\sin \sqrt{2it}}{\sqrt{2it}} \right)^{-1/2}$ — предельная характеристическая функция статистики ω_n^2 .

Использование этого выражения для вычисления распределения путем численного интегрирования в формуле обращения осложняется необходимостью выделения нужной ветви функции $\varphi_n(t)$.

Тику (1965) рассматривал аппроксимацию распределения ω^2 распределением χ^2 . В работе Стивенса (1968) приведены процентные точки распределения ω_n^2 при малых n , не превышающих 20.

В работе Льюиса (1961) приведены таблицы функции распределения статистики A_n^2 при $n = 1(1)8, \infty$.

Относительно скорости сходимости функции распределения W_n^2 к предельной можно утверждать, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $b(\varepsilon)$, что $\Delta_n < < b(\varepsilon) n^{-(1/2)+\varepsilon}$,

(Орлов, 1974), и существует постоянная $c > 0$ такая, что $\Delta_n \leq c \ln n / \sqrt{n}$ (Боровских, 1976; Чёргё, 1976), где $\Delta_n = \sup_{-\infty < z < \infty} |\mathbf{P}(W_n^2 < z) - \mathbf{P}(W^2 < z)|$. Эти результаты справедливы для некоторого более широкого класса статистик ω_n^2 .

Практически, уже при $n=2$ статистика W_n^2 имеет распределение, сравнительно близкое к предельному. Существуют эмпирические формулы (Стивенс, 1974) для преобразования статистик W_n^2 , A_n^2 и ряда других статистик к статистикам, распределение которых менее зависит от n . Так, например, распределение статистики $(1 + (1/n))(W_n^2 - (0,4/n) + (0,6/n^2))$ со значительно большей точностью, чем распределение статистики W_n^2 , аппроксимируется предельным распределением W^2 .

4. Рассмотрим результаты, относящиеся к асимптотической мощности критерия ω^2 . Сначала рассмотрим случай фиксированных альтернатив. При фиксированном альтернативном распределении вероятность отвергнуть гипотезу при заданном уровне значимости с ростом n стремится к 1. Поэтому мы рассмотрим статистику ω_n^2 вида (2), нормированную специальным образом.

Пусть истинная функция распределения наблюдений есть $G(t)$, причем функция $\delta(t) = t - G(t)$ не равна тождественно нулю. Пусть $d_n = (\omega_n^2 / \sqrt{n}) - \mu$, где

$$\mu = \int_0^1 \psi^2(t) \delta^2(t) dt.$$

Тогда

$$\begin{aligned} d_n = & 2 \sqrt{n} \int_0^1 \delta(t) \psi^2(t) (G(t) - G_n(t)) dt + \\ & + \sqrt{n} \int_0^1 \psi^2(t) [G(t) - G_n(t)]^2 dt. \quad (7) \end{aligned}$$

Второе слагаемое в правой части (7) стремится к нулю по вероятности, а случайный процесс

$\sqrt{n} \psi(t) (G(t) - G_n(t))$ слабо сходится в L_2 к гауссовскому случайному процессу с нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией

$$K(t, \tau) = \psi(t) \psi(\tau) [\min(G(t), G(\tau)) - G(t) G(\tau)].$$

Следовательно, d_n имеет асимптотически нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием и дисперсией

$$\sigma^2 = 4 \int_0^1 \int_0^1 \delta(t) \delta(\tau) K(t, \tau) dt d\tau.$$

Статистики ω_n^2 при фиксированных альтернативах рассматривал Чепмен (1958).

5. Теперь будем рассматривать случай, когда альтернативные распределения изменяются с ростом n следующим образом (Чиби́сов, 1961):

$$G_a(x) = G_0(x) + \frac{a}{\sqrt{n}} \delta(G_0(x)),$$

причем

$$\int_0^1 \delta^2(u) \psi^2(u) du = 1, \quad \int_0^1 \delta(u) \psi(u) du < \infty, \quad (8)$$

а $G_0(x)$ и $\delta(t)$ — непрерывные функции. При этих условиях и условии (6) предельное распределение статистики ω_n^2 совпадает с распределением случайной величины

$$\omega^2 = \int_0^1 [\xi(t) + a\delta(t)\psi(t)]^2 dt,$$

где $\xi(t)$ — гауссовский случайный процесс с нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией

$$K(t, \tau) = \psi(t) \psi(\tau) (\min(t, \tau) - t\tau).$$

Пусть λ_i и $\varphi_i(t)$, $i = 1, 2, \dots$, — собственные значения и собственные функции корреляционного оператора с ядром $K(t, \tau)$. Обозначим

$$\delta_k = \int_0^1 \delta(t) \psi(t) \varphi_k(t) dt, \quad k = 1, 2, \dots$$

Тогда предельное распределение статистики ω_n^2 при рассматриваемых альтернативах может быть представлено квадратичной формой

$$Q_a = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} (x_i + a \sqrt{\lambda_k} \delta_k)^2,$$

где x_i , $i = 1, 2, \dots$, — независимые одинаково распределенные стандартные нормальные случайные величины.

Характеристическая функция Q есть

$$\varphi_a(t) = \frac{1}{\sqrt{D(2it)}} \exp \{a^2 T(2it)\}, \quad (9)$$

где

$$T(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda \lambda_k \delta_k^2}{2(\lambda_k - \lambda)},$$

а $D(\lambda)$ — определитель Фредгольма ядра $K(t, \tau)$. При выводе этой формулы используется формула для характеристической функции нецентрального распределения χ^2 (см., например, Барра, 1974). Так как

$$T(\lambda) = \frac{\lambda}{2} \int_0^1 \delta^2(t) \psi^2(t) dt + \frac{\lambda^2}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\delta_k^2}{\lambda_k - \lambda},$$

а резольвента ядра $K(t, \tau)$ есть

$$\Gamma(t, \tau, \lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(t) \varphi_k(\tau)}{\lambda_k - \lambda},$$

то, учитывая (8), получаем

$$T(\lambda) = \left(\frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda^2}{2} b(\lambda) \right),$$

$$\text{где } b(\lambda) = \int_0^1 \int_0^1 \delta(t) \delta(\tau) \psi(t) \psi(\tau) \Gamma(t, \tau, \lambda) dt d\tau.$$

Справедлива следующая

Теорема (Чиби́сов, 1961). При $a \rightarrow \infty$

$$P_a \{ \omega_n^2 > x \} - \Phi \left(\frac{x - a^2}{2a\sigma} \right) \rightarrow 0$$

равномерно по x , где $\Phi(x)$ — стандартная функция нормального распределения.

§ 2. Проверка сложной гипотезы в одномерном случае

Рассмотрим задачу проверки гипотезы о принадлежности функции распределения одномерной случайной величины семейству функций распределения

$$\mathcal{G} = \{G(x, \theta), \theta \in \Theta \subset R^k, x \in R^1\}.$$

Критерий ω^2 для проверки этой гипотезы основывается на статистике

$$\omega_n^2 = n \int_{-\infty}^{\infty} \psi^2(G(x, \theta_n)) (F_n(x) - G(x, \theta_n))^2 dG(x, \theta_n). \quad (1)$$

Здесь θ_n — оценка неизвестного параметра θ_0 в предположении, что наблюдения X_1, \dots, X_n имеют распределение из семейства \mathcal{G} , $F_n(X)$ — эмпирическая функция распределения. Вычисление значений статистики ω_n^2 может производиться по формуле (1.5), в которой $t_i = G(X_i, \theta_n)$.

Если оценка θ_n и весовая функция удовлетворяют условиям, сформулированным в первой главе, то предельное распределение статистики ω_n^2 совпадает с распределением случайной величины

$$\omega^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \eta^2(x, \theta_0) dG(x, \theta_0) = \int_0^1 \xi(t, \theta_0) dt, \quad (2)$$

где $\eta(x, \theta_0)$ и $\xi(t, \theta_0)$ — некоторые гауссовские процессы на $(-\infty, \infty)$ и $(0, 1)$ соответственно, связанные преобразованием $t = G(x, \theta_0)$. В общем случае распределение ω^2 оказывается зависящим от неизвестного параметра θ_0 . Пусть в качестве оценки θ_n выбраны оценки максимального правдоподобия и существуют плотность $g(x, \theta) = \partial G(x, \theta) / \partial x$, вектор $S(x, \theta)$ с конечными при всех $x \in (-\infty, \infty)$ и $\theta \in \Theta$ компонентами $\frac{\partial}{\partial \theta_i} \log g(x, \theta)$, $i = 1, \dots, k$, и положительно определенная информационная матрица Фишера

$$I(\theta) = E \left\| \frac{\partial}{\partial \theta_i} \log g(x, \theta) \frac{\partial}{\partial \theta_j} \log g(x, \theta) \right\|$$

размера $k \times k$. При некоторых условиях регулярности справедливо следующее разложение для оценки максимального правдоподобия (Закс, 1975, стр. 320)

$$\sqrt{n} (\theta_n - \theta_0) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n I^{-1}(\theta) S(X_i, \theta) + R_n,$$

где $|R_n| \rightarrow 0$ по вероятности.

Корреляционная функция процесса $\xi(t, \theta_0)$ такова:
 $K(t, \tau) = \psi(t) \psi(\tau) [K_0(t, \tau) - \bar{q}(t, \theta_0)' I^{-1}(\theta_0) \bar{q}(t, \theta_0)],$ (3)
 где $K_0(t, \tau) = \min(t, \tau) - t\tau$, $t, \tau \in (0, 1)$,

$$\bar{q}(t, \theta) = q(x, \theta) = \frac{\partial G(x, \theta)}{\partial \theta}, \quad t = G(x, \theta).$$

Это следует из общей формулы (1.9), если учесть, что $B(\theta_0) = I^{-1}(\theta_0)$ и $v(x) = I^{-1}(\theta_0) q(x, \theta_0)$. Весовая функция такова, что

$$\int_0^1 K(t, t) dt < \infty.$$

Корреляционная функция вида (3) при некоторых более сильных ограничениях на весовую функцию получена в работе Гихмана (1954), в которой рассмотрены некоторые частные случаи, когда корреляционная функция $K(t, \tau)$, а следовательно, и предельное распределение ω^2 не зависят от значения неизвестного параметра θ_0 .

Пусть $\mathcal{G} = \left\{ G\left(\frac{x - \theta_1}{\theta_2}\right), -\infty < \theta_1 < \infty, \theta_2 > 0 \right\}$, причем $g(x) = G'(x)$ не обращается в нуль на $(-\infty, \infty)$ и существует $g'(x)$. Относительно параметров этого семейства можно предположить, что неизвестен только параметр θ_1 или параметр θ_2 или неизвестны оба параметра. Соответствующие корреляционные функции будут таковы:

$$K_1(t, \tau) = \psi(t) \psi(\tau) [K_0(t, \tau) - w_1(t) w_1(\tau) / \rho_1], \quad (4)$$

$$K_2(t, \tau) = \psi(t) \psi(\tau) [K_0(t, \tau) - w_2(t) w_2(\tau) / \rho_2], \quad (5)$$

$$K_3(t, \tau) = \psi(t) \psi(\tau) \left[K_0(t, \tau) - \frac{1}{a} (\rho_2 w_1(t) w_1(\tau) - \right. \\ \left. - \rho_3 (w_1(t) w_2(\tau) + w_2(t) w_1(\tau)) + \rho_1 w_2(t) w_2(\tau)) \right], \quad (6)$$

где

$$w_1(t) = g(G^{-1}(t)), \quad w_2(t) = G^{-1}(t) g(G^{-1}(t)),$$

$$\rho_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[g'(x)]^2}{g(x)} dx, \quad \rho_2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{[g'(x)]^2}{g(x)} dx - 1,$$

$$\rho_3 = - \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{[g'(x)]^2}{g(x)} dx, \quad a = \rho_1 \rho_2 - \rho_3^2.$$

Для симметричных распределений $\rho_3 = 0$, и, следовательно,

$$K_3(t, \tau) = \psi(t) \psi(\tau) [K_0(t, \tau) - (w_1(t) w_1(\tau)/\rho_1) - (w_2(t) w_2(\tau)/\rho_2)]. \quad (7)$$

Обратимся к задаче нахождения собственных значений ядра (3). Представим ядро $K(t, \tau)$ в виде

$$K(t, \tau) = \psi(t) \psi(\tau) [K_0(t, \tau) - \kappa(t)' \kappa(\tau)] =$$

$$= \psi(t) \psi(\tau) \left[K_0(t, \tau) - \sum_{i=1}^k \kappa_i(t) \kappa_i(\tau) \right], \quad (8)$$

где $\kappa = I^{-1/2}(\theta_0) \bar{q}(t, \theta_0)$. Компоненты вектора κ без ограничения общности считаем линейно независимыми.

Пусть $\gamma(t, \tau, \lambda)$ и $D_0(\lambda)$ — резольвента и определитель Фредгольма ядра $\psi(t) \psi(\tau) K_0(t, \tau)$, λ_i и φ_i , $i = 1, 2, \dots$, — его собственные значения и собственные функции,

$$s(t) = \psi(t) \kappa(t) + \lambda \int_0^1 \psi(t) \gamma(t, \tau, \lambda) \kappa(\tau) d\tau,$$

$$R = \int_0^1 \psi(t) s(t) \kappa(t)' dt, \quad h_i = \int_0^1 \psi(t) \kappa(t) \varphi_i(t) dt,$$

$$\lambda_i \leq \lambda_2 \leq \dots$$

При $\psi(t) = 1$

$$\gamma(t, \tau, \lambda) = \frac{\sin \sqrt{\lambda} t_1 \sin \sqrt{\lambda} (1 - \tau_1)}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}},$$

$$t_1 = \min(t, \tau), \quad \tau_1 = \max(t, \tau), \quad \lambda_i = (i\pi)^2,$$

$$\varphi_i(t) = \sqrt{2} \sin \pi i t, \quad i = 1, 2, \dots,$$

$$D_0(\lambda) = (\sin \sqrt{\lambda}) / \sqrt{\lambda}.$$

По формуле Бэтмана (Канторович и Крылов, 1962) получаем, что резольвента ядра $K(t, \tau)$ имеет вид

$$\Gamma(t, \tau, \lambda) = \gamma(t, \lambda, \tau) - s(t)' [E + \lambda R]^{-1} s(\tau),$$

E — единичная матрица $k \times k$. Считаем, что собственные значения ядра $\psi(t)\psi(\tau)K_0(t, \tau)$ однократны.

Собственные значения ядра $K(t, \tau)$ совпадают с полюсами резольвенты $\Gamma(t, \tau, \lambda)$. Такими значениями являются, во-первых, решения уравнения

$$\det(E + \lambda R) = 0, \quad (9)$$

а, во-вторых, множество чисел $\Lambda = \{\lambda_i: |h_i| = 0\}$.

Используя билинейный ряд

$$\gamma(t, \tau, \lambda) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(t) \varphi_i(\tau)}{\lambda_i - \lambda},$$

получаем, что из (9) следует уравнение для нахождения характеристических чисел, отличных от тех из λ_i , которые не входят в множество Λ ,

$$\det\left(E - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{h_i h_i'}{\alpha_i - \alpha}\right) = 0, \quad (10)$$

где $\alpha_i = 1/\lambda_i$, $\alpha = 1/\lambda$ (Дёрбин, 1973а).

Уравнение (10) может быть записано также в виде

$$\det\left(I(\theta) - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\beta_i \beta_i'}{\alpha_i - \alpha}\right) = 0,$$

где

$$\beta_i = \int_0^1 \psi(t) \bar{q}(t) \varphi_i(t) dt.$$

Определители Фредгольма ядер вида (2) могут быть найдены, исходя из формулы

$$D(\lambda) = \exp \left\{ - \int_0^{\lambda} \int_0^1 \Gamma(t, t, \lambda) dt d\lambda \right\},$$

как это было отмечено Гихманом (1954).

Рассмотрим еще одно представление для определителей Фредгольма. Пусть

$$T_{jj}^r = 1 + \sum_{i \neq r} \frac{h_{ij}^2}{\alpha - \alpha_i}, \quad T_{kl}^r = \sum_{i \neq r} \frac{h_{ik} h_{il}}{\alpha - \alpha_i}, \quad k \neq l.$$

Теорема 1. Пусть порядок целой функции $D_0(\lambda)$ есть $a < 1$, и все λ_i различны. Тогда определитель Фредгольма ядра вида (8) есть

$$D(\lambda) = D_0(\lambda) d(\lambda) / \prod_{\lambda_s \in \Lambda^*} (1 - \lambda/\lambda_s),$$

где

$$d(\lambda) = \det \left(E - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{h_i h_i'}{\alpha_i - \alpha} \right),$$

а множество Λ^* состоит из тех λ_r , $r = 1, 2, \dots$, для которых $|h_r| \neq 0$, но равны нулю величины

$$c_r = \sum_{m_1, \dots, m_k} (-1)^q \sum_{t=1}^k h_{rt} h_{r m_t} \prod_{i \neq t} T_{i m_i}^r, \quad (11)$$

где m_1, \dots, m_k — всевозможные перестановки чисел от 1 до k , а q — число попарных перестановок.

Доказательство. Рассматривая коэффициент при $(\alpha - \alpha_r)^{-(k-s)}$ в разложении в ряд Лорана в окрестности α_r функции $d(\lambda)$, можно заметить, что при $k - s > 1$ он всегда равен нулю. Коэффициент при $(\alpha - \alpha_r)^{-1}$ равен c_r , причем, как показывает приводимый далее пример, он может обращаться в нуль при $|h_r| \neq 0$. Следовательно, $D(\lambda)$ есть целая функция, множество нулей которой совпадает с множеством собственных значений ядра $K(t, \tau)$. Для того, чтобы функция $D(\lambda)$ была определителем Фредгольма ядра $K(t, \tau)$, достаточно теперь доказать, что ее порядок не превышает a .

Представим $d(\lambda)$ в виде

$$d(\lambda) = \sum^* \frac{b_{i_1, \dots, i_k}^{p(i_1), \dots, p(i_k)}}{(\alpha_{i_1} - \alpha)^{p(i_1)} \dots (\alpha_{i_k} - \alpha)^{p(i_k)}}, \quad (12)$$

где суммирование \sum^* ведется по всем $\{i_1, \dots, i_k\}$ при условии, что $p(i_1) + \dots + p(i_k) \leq k$. Заметим, что

$$\sum^* |b_{i_1, \dots, i_k}^{p(i_1), \dots, p(i_k)}| = A < \infty. \quad (13)$$

Нужно доказать, что

$$\sup_{|\lambda|=r} D(\lambda) \leq e^{\sigma r^a}, \quad 0 \leq \sigma < \infty,$$

где σ — некоторая константа.

Пусть $q(r)$ — наименьшее целое число такое, что $\lambda_i > 2r$ при $i > q(r)$. Таким образом, $\lambda_i < 2r_i$ при $r_i = q^{-1}(i)$. Из сходимости ряда $\sum 1/\lambda_i^a$ следует, что $r_i > i^{1/a}$ при достаточно больших i . Таким образом, $q^{-1}(i) > i^{1/a}$ или $q(i) < i^a$. Следовательно, $q(r) < r^a$ при достаточно больших r .

Разобьем сумму в правой части (12) на две суммы. В первую сумму (\sum') включим члены, зависящие от α_i при $i \leq q(r)$, а во вторую сумму (\sum'') — остальные члены. Первая сумма при $|\lambda| = r$ меньше, чем

$$r^k \sum \left[\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_{i_1}}\right)^{-p(i_1)} \dots \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_{i_k}}\right)^{p(i_k)} \times \right. \\ \left. \times \sum^* |b_{i_1, \dots, i_k}^{p(i_1), \dots, p(i_k)}| \right].$$

Здесь суммирование ведется по всем $\{i_1, \dots, i_k\}$ таким, что $p(i_1) + \dots + p(i_k) < k$ и $i_j \leq q(r)$, $j=1, \dots, k$, причем использовано неравенство

$$\sup_{|\lambda|=r} \left| \frac{1}{\alpha_i - \alpha} \right| \leq r, \quad (14)$$

справедливое при $i > q(i)$. Вторая сумма \sum'' с учетом (13) и (14) не превосходит Ar^k .

Используя (13), учитывая, что число членов внешней суммы не превышает $k^{q(r)}$ и то, что порядок функции

$$D_0(\lambda) = \prod_{i=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_i}\right)$$

при выбрасывании любого числа сомножителей не превышает a , получаем, что

$$\sup_{|\lambda|=r} D(\lambda) \leq Ar^k e^{r^a} (k^{q(r)} + 1).$$

Таким образом, порядок функции $D(\lambda)$ не превышает a .

Обозначим собственные значения ядра $K(t, \tau)$ через $\lambda'_1 \leq \lambda'_2 \leq \dots$ с учетом их кратности. Так как $D(\lambda)$ есть целая функция конечного порядка $a < 1$, то по теореме Бореля (Маркушевич, 1950, стр. 527) получаем, что

$$D(\lambda) = \prod_{i=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda'_i}\right).$$

Следовательно, $D(\lambda)$ — определитель Фредгольма ядра $K(t, \tau)$.

Доказанную теорему сформулировали при $k = 1$ Дарлинг (1955), а при $k \leq 3$ (без учета того, что Λ^* может оказаться непустым) Сукхатм (1972).

Пример. Рассмотрим ядро

$$K(t, \tau) = K_0(t, \tau) - a_1^2 \varphi_1(t) \varphi_1(\tau) - a_2^2 \varphi_2(t) \varphi_2(\tau),$$

где $\varphi_i(t) = \sqrt{2} \sin \pi i t$, $\lambda_i = (i\pi)^2$, $i = 1, 2$. Тогда $h_1 = (a_1, 0, 0, \dots)$, $h_2 = (0, a_2, 0, \dots)$, а из (11) следует, что

$$c_1 = a_1^2 (1 + a_2^2 / (\alpha_1 - \alpha_2)), \quad c_2 = a_2^2 (1 + a_1^2 / (\alpha_2 - \alpha_1)).$$

$$c_2 = 0, \text{ при } a_1^2 = \alpha_1 - \alpha_2 = 3/(2\pi)^2, \quad c_1 \neq 0 \text{ при } a_1^2 \neq 0.$$

Взяв, например, $a_2^2 = 3/(2\pi)^2$, получаем, что ядро $K(t, \tau)$ положительно определено, $\Lambda^* = \{\lambda_2\}$, а $d(\lambda) = 0$ лишь при $\alpha = 1/(3\pi)^2$. Из теоремы 1 следует, что

$$D(\lambda) = D_0(\lambda) d(\lambda) / (1 - \lambda/(2\pi)^2) =$$

$$= (1 - \lambda/(3\pi)^2)^2 \prod_{i=4}^{\infty} (1 - \lambda/(i\pi)^2).$$

§ 3. Критерии нормальности

Как частный случай задачи, описанной в предыдущем параграфе, рассмотрим задачу о проверке гипотезы нормальности по выборке X_1, \dots, X_n .

Предполагается, что могут оказаться неизвестными математическое ожидание или дисперсия нормального распределения или оба параметра сразу. Поэтому рассматриваются задачи о проверке трех гипотез:

$$H_1: F(x) \in \mathcal{G}_1 = \{\Phi(x-m): |m| < \infty\},$$

$$H_2: F(x) \in \mathcal{G}_2 = \{\Phi(x/\sigma): 0 < \sigma < \infty\},$$

$$H_3: F(x) \in \mathcal{G}_3 = \left\{ \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right): |m| < \infty, 0 < \sigma < \infty \right\},$$

где $\Phi(x)$ — стандартная функция нормального распределения, а m и σ — неизвестные параметры. В качестве оценок m и σ выберем соответственно выборочные среднее и дисперсию. Считаем, что $\psi(t) \equiv 1$.

Из общих формул (2.3), (2.4) и (2.5) нетрудно получить, что гипотезам H_1 , H_2 и H_3 соответствуют корреляционные функции предельных процессов.

$$K_1(t, \tau) = K_0(t, \tau) - \kappa_1(t) \kappa_1(\tau),$$

$$K_2(t, \tau) = K_0(t, \tau) - \kappa_2(t) \kappa_2(\tau),$$

$$K_3(t, \tau) = K_0(t, \tau) - \kappa_1(t) \kappa_1(\tau) - \kappa_2(t) \kappa_2(\tau),$$

где

$$K_0(t, \tau) = \min(t, \tau) - t\tau, \quad \kappa_1(t) = \varphi(\Psi(t)),$$

$$\kappa_2(t) = \Psi(t) \varphi(\Psi(t)) / \sqrt{2}, \quad \varphi(x) = \Phi'(x), \quad \Psi(t) = \Phi^{-1}(t).$$

Таким образом, в рассматриваемых задачах функции распределения ω^2 не зависят от истинных значений оцениваемых параметров.

Заметим, что функция $\kappa_1(t)$ симметрична относительно $t = 1/2$, а $\kappa_2(t)$ — антисимметрична. Отсюда следует, что коэффициенты h_{i1} с четными номерами в разложении $\kappa_1(t)$ по собственным функциям ядра $K_0(t, \tau)$ обращаются в нуль, а для функции $\kappa_2(t)$ обращаются в нуль коэффициенты с нечетными номерами. Поэтому, исходя из теоремы в § 2, получим, что определители Фредгольма для ядер $K_1(t, \tau)$, $K_2(t, \tau)$ и $K_3(t, \tau)$ соответственно есть

$$D_1(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sin \sqrt{\lambda} d_1(\lambda),$$

$$D_2(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sin \sqrt{\lambda} d_2(\lambda),$$

$$D_3(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sin \sqrt{\lambda} d_1(\lambda) d_2(\lambda),$$

где

$$d_1(\lambda) = 1 - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{h_{2i-1,1}^2}{[(2i-1)\pi]^{-2} - \lambda^{-1}},$$

$$d_2(\lambda) = 1 - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{h_{2i,2}^2}{(2i\pi)^{-2} - \lambda^{-1}}.$$

Функции $d_1(\lambda)$ и $d_2(\lambda)$ могут быть представлены в интегральном виде способом, использованным в работе Дарлингга (1955).

В работе Каца, Кифера и Вольфовитца (1955) используется другой подход к нахождению собственных чисел. Ими получено уравнение $A_1(\sqrt{\lambda}) A_2(\sqrt{\lambda}) = 0$, где

$$A_1(\mu) = (1 + \mu^2/2\pi \sqrt{3}) \cos \frac{\mu}{2} + 4\mu^3 I_1(\mu),$$

$$A_2(\mu) = (1 + \mu^2/12\pi \sqrt{3}) \sin \frac{\mu}{2} + 4\mu^3 I_2(\mu),$$

причем

$$I_1(\mu) = \int_0^{1/2} \kappa_1(x) \sin \mu(x) dx \int_x^{1/2} \kappa_1(t) \cos \mu\left(\frac{1}{2} - t\right) dt,$$

$$I_2(\mu) = \int_0^{1/2} \kappa_2(x) \sin \mu x dx \int_x^{1/2} \kappa_2(t) \sin \mu\left(\frac{1}{2} - t\right) dt.$$

Для нахождения собственных значений ядер $K_1(t, \tau)$ и $K_2(t, \tau)$ аналогичным путем могут быть получены уравнения

$$\frac{\sin(\sqrt{\lambda}/2)}{\sqrt{\lambda}} A_1(\sqrt{\lambda}) = 0 \quad \text{и} \quad \cos(\sqrt{\lambda}/2) A_2(\sqrt{\lambda}) = 0.$$

В работе автора (1976) выражения для $I_1(\mu)$ и $I_2(\mu)$ преобразованы к однократным интегралам от тригонометрических функций и функций, не зависящих от μ и задаваемых однократными интегралами. Затем путем интегрирования по частям понижается степень μ , входящая в выражения для $A_1(\mu)$ и $A_2(\mu)$. Это облегчает процесс вычисления нулей функций $A_1(\mu)$ и $A_2(\mu)$.

Сначала выражения для $I_1(\mu)$ и $I_2(\mu)$ принимают вид

$$I_1(\mu) = \int_0^{1/4} R_1(z) \sin 2\mu z \, dz,$$

$$I_2(\mu) = \int_0^{1/4} R_2(z) \cos 2\mu z \, dz,$$

где

$$R_i(z) = \int_{-1/4}^{1/4} \operatorname{sign}(v+z) \kappa_i(|v+z|) \kappa_i\left(z-v+\frac{1}{2}\right) dv,$$

$$0 \leq z \leq 1/4, \quad i=1, 2.$$

Производя в выражениях для $A_i(\mu)$, $i=1, 2$, двукратное интегрирование по частям, получаем формулы

$$A_1(\mu) = \cos \frac{\mu}{2} - \mu \int_0^{1/4} R_1''(z) \sin 2\mu z \, dz, \quad (1)$$

где

$$R_1''(z) = 4\Psi\left(\frac{1}{4}-z\right) \kappa_1\left(\frac{1}{4}-z\right) -$$

$$- 4\Psi\left(\frac{1}{4}+z\right) \kappa_1\left(\frac{1}{4}+z\right) -$$

$$- 4 \int_{-1/4}^{1/4} \operatorname{sign}(v+z) \frac{\kappa_1(|v+z|)}{\kappa_1\left(\frac{1}{2}-|v-z|\right)} dv,$$

и

$$A_2(\mu) = \sin \frac{\mu}{2} - \mu \int_0^{1/4} R_2''(z) \cos 2\mu z \, dz, \quad (2)$$

где

$$\sqrt{2} R_2''(z) = 4\kappa_2\left(\frac{1}{4}-z\right) \left(1 - \Psi^2\left(\frac{1}{4}-z\right)\right) +$$

$$+ 4\kappa_2\left(\frac{1}{4}+z\right) \left(1 - \Psi^2\left(\frac{1}{4}+z\right)\right) -$$

$$- 8 \int_{-1/4}^{1/4} \operatorname{sign}(v^2 - z^2) \kappa_2(|v+z|) \frac{\Psi\left(\frac{1}{2}-|z-v|\right)}{\kappa_1\left(\frac{1}{2}-|z-v|\right)} dv.$$

В работе автора (1976) приведены таблицы нулей функций $A_1(\mu)$ и $A_2(\mu)$, вычисленные при использовании выражений (1) и (2).

Наименьшие положительные корни уравнения $A_1(\mu) = 0$ есть

7,38265	13,6633	19,9157	26,167	32,422
38,680	44,940	51,203	57,469	63,736

Наименьшие положительные корни уравнения $A_2(\mu) = 0$ есть

8,6247	15,136	21,525	27,871	34,196
40,511	46,82	53,12	59,42	65,72

Поскольку $A_1(\mu)$ и $A_2(\mu)$ являются целыми функциями, имеющими тип и порядок, равные 1, то определители Фредгольма ядер $K_i(t, \tau)$, $i = 1, 2, 3$, есть соответственно

$$D_1(\lambda) = \frac{2}{\sqrt{\lambda}} A_1(\sqrt{\lambda}) \sin \frac{\sqrt{\lambda}}{2},$$

$$D_2(\lambda) = \frac{2}{\sqrt{\lambda}} A_2(\sqrt{\lambda}) \cos \frac{\sqrt{\lambda}}{2},$$

$$D_3(\lambda) = \frac{2}{\sqrt{\lambda}} A_1(\sqrt{\lambda}) A_2(\sqrt{\lambda}).$$

Обозначим нули $A_1(\mu)$ и $A_2(\mu)$ соответственно через $\sqrt{\lambda_{1k}}$ и $\sqrt{\lambda_{2k}}$, $k = 1, 2, \dots$. Так как $\lambda_{1k} \approx [(2k-1)\pi]^2$ и $\lambda_{2k} \approx [2(k+1)\pi]^2$ при больших k (это следует из выражений для $d_1(\lambda)$ и $d_2(\lambda)$), то при вычислениях функции распределения рассматриваемых статистик по формуле Смирнова, исследуемой в следующей главе, удобно воспользоваться следующими аппроксимациями для определителей Фредгольма:

$$D_1(\lambda) \approx \frac{\sin \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} \left[\prod_{k=1}^{M+1} \left(1 - \frac{\lambda}{((2k-1)\pi)^2} \right) \right]^{-1} \prod_{k=1}^M \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_{1k}} \right),$$

$$D_2(\lambda) \approx \frac{\sin \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} \left[\prod_{k=1}^M \left(1 - \frac{\lambda}{(2k\pi)^2} \right) \right]^{-1} \prod_{k=1}^M \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_{2k}} \right),$$

$$D_3(\lambda) \approx \frac{\sin \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} \left[\prod_{k=1}^M \left(1 - \frac{\lambda}{(k\pi)^2} \right) \right]^{-1} \prod_{k=1}^M \left[\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_{1k}} \right) \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_{2k}} \right) \right],$$

где M — достаточно большое число.

§ 4. Критерий экспоненциальности

Рассмотрим задачу проверки гипотезы о том, что наблюдения X_1, \dots, X_n являются наблюдениями случайной величины с экспоненциальным распределением при неизвестном математическом ожидании, $H_0: G(x, \theta) = 1 - \exp(-x/\theta)$, $\theta > 0$.

Из (2.4) следует, что корреляционная функция предельного процесса в (2.2), если справедлива H_0 , есть $K_2(t, \tau) = K_0(t; \tau) - \omega(t)\omega(\tau)$, где $\omega(t) = (1 - t) \ln(1 - t)$. В таблице 12 приложения приведены процентные точки распределения соответствующей статистики, взятые из работы Дёрбина, Нотта и Тейлора (1975).

§ 5. Многомерные критерии. Простая гипотеза

Пусть заданы наблюдения X_1, \dots, X_n s -мерной случайной величины $X \in R^s$ с обычной функцией распределения $F(x)$, $X_i = (X_{i1}, \dots, X_{is})$, $i = 1, \dots, n$. Для проверки гипотезы $H_0: F(x) = G(x)$, где $G(x)$ — известная непрерывная функция распределения, будем использовать статистику

$$\omega_n^2 = n \int_{R^s} (G_n(x) - G(x))^2 dG(x), \quad (1)$$

где эмпирическая функция распределения имеет вид $G_n(x) = G_n(x_1, \dots, x_s) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^s \Delta(x_j - X_{ij})$, $\Delta(x)$ определена согласно (1.2).

Распределение статистики (1), как отметил Розенблатт (1952, 1952б), зависит от $G(x)$. Это можно установить на частном примере, используя семейство двумерных функций распределения

$$G(x_1, x_2) = x_1 x_2 (x_1 + a x_2) / (1 + a), \quad 0 < x_1, x_2 < 1, a > 0. \quad (2)$$

Вычислив математическое ожидание статистики ω_n^2 , используя общую формулу

$$E\omega_n^2 = \int_{R^s} G(x) (1 - G(x)) dG(x),$$

получаем, что оно равно $\frac{1}{180(1+a)^2} (65a^2 + 114a + 65)$, т. е. зависит от a . Для того чтобы устранить зависимость распределения статистики ω^2 от распределения $G(x)$, исходную выборку следует преобразовать в выборку из равномерно распределенной на кубе $C_s = [0, 1]^s$ случайной величины. Это можно сделать (Розенблатт, 1952а), используя одно из преобразований вида

$$\begin{aligned} y_1 &= G(x_1), \\ y_2 &= G(x_2 | x_1), \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ y_s &= G(x_s | x_1, \dots, x_{s-1}). \end{aligned}$$

Выбор того или иного преобразования, очевидно, должен влиять на мощность статистики по отношению к конкретным альтернативам.

Статистика (1) применительно к проверке гипотезы о том, что наблюдаемая случайная величина имеет равномерное распределение на C_s , принимает вид

$$\omega_n^2 = n \int_{C_s} (G_n(x) - x_1 \dots x_s) dx_1 \dots dx_s. \quad (3)$$

Эта статистика рассматривалась Розенблаттом (1952б), Дёрбиным (1970) и Кривяковой, Мартыновым и Тюриным (1977).

Корреляционная функция процесса $n(G_n(x) - x_1 \dots$
 $\dots x_s)$ есть

$$K(x, y) = \prod_{i=1}^s \min(x_i, y_i) - \prod_{i=1}^s x_i y_i.$$

Собственными значениями соответствующего ковариационного оператора являются, во-первых, числа $\alpha_{ks} = (2/\pi)^{2s} (2k+1)^{-2}$, $k = 1, 2, \dots$, с кратностями q_{ks} , такими, что величины $q_{ks} + 1$ равны числам различных способов представления чисел $2k+1$ в виде s сомножителей с учетом порядка. Так, например, $q_{40,2} = 4$. Остальные собственные значения однократны и могут быть получены при решении относительно

$\lambda = 1/\alpha$ уравнения

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(q_{ks} + 1) \alpha_{ks}^2}{\alpha_{ks} - \alpha} = \frac{1}{2^s}. \quad (4)$$

Указанные собственные значения и уравнение (4) могут быть получены по методу аналогичному методу, описанному в § 2.

Левая часть уравнения (4) монотонно возрастает в каждом интервале $(\lambda_{k+1}, \lambda_k)$ и имеет в нем один корень.

Определитель Фредгольма ядра $K(x, y)$ определяется формулой

$$D(\lambda) = 2^s \left(\frac{1}{2^s} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda (q_{ks} + 1) \alpha_{ks}^2}{\alpha_{ks} \lambda - 1} \right) D_0(\lambda),$$

где $D_0(\lambda) = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - \lambda \alpha_{ks})^{q_{ks}+1}$. Доказательство этого утверждения аналогично доказательству теоремы, содержащейся в § 2.

При вычислении наибольших корней уравнения (4) удобно аппроксимировать его уравнением

$$\sum_{k=1}^N \frac{(q_{ks} + 1) \alpha_{ks}^2}{\alpha_{ks} - \alpha} + \frac{r_s}{\alpha} = \frac{1}{2^s}, \quad (5)$$

где $r_s = \left(\frac{1}{6}\right)^s - \sum_{i=1}^N (q_{is} + 1) \alpha_{is}^2$.

Ниже приведено по 10 величин, обратных к наибольшим корням уравнения (5) при $s = 2$ и $s = 3$:

$s = 2$				
15,814	88,019	203,58	359,66	604,97
843,29	1125,2	1578,2	1929,0	2337,0
$s = 3$				
30,196	203,92	476,57	845,74	1484,9
2019,1	2696,6	3909,8	4666,8	5645,6

Статистика ω_n^2 при $s=2$ может быть вычислена по формуле (Дёрбин, 1970)

$$\begin{aligned}\omega_n^2 = & \omega_{n1}^2 + \omega_{n2}^2 - \sum_{i=1}^n \left(\frac{r_i - (1/2)}{n} - X_{i1} X_{i2} \right)^2 + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (X_{i1}^2 X_{i2}^2 - X_{i1}^2 - X_{i2}^2) + \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n R_i X_{i2} + \\ & + \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \left(r_i - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{18} n,\end{aligned}$$

где ω_{n1}^2 и ω_{n2}^2 — одномерные статистики ω_n^2 , вычисляемые по каждой из одномерных выборок X_{11}, \dots, X_{n1} и X_{12}, \dots, X_{n2} , например, по формуле (1.3); $r_i = nF_n(X_i) + 1$ — число наблюдений среди $X_j, j=1, \dots, n$, таких, что $X_{j1} \leq X_{i1}, X_{j2} \leq X_{i2}$; R_i — число наблюдений среди всех X_j , таких, что $X_{j1} > X_{i1}, X_{j2} < X_{i2}$.

Более удобна вычислительная формула для статистики

$$\hat{\omega}_n^2 = n \int_{c_s} \left(F_n(x) - x_1 \dots x_s + \frac{1}{n} \right)^2 dG_n(x).$$

Так как эмпирическая мера сосредоточена только в точках X_i , то

$$\hat{\omega}_n^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{r_i}{n} - X_{i1} \dots X_{is} \right)^2, \quad s \geq 2.$$

Можно рассматривать и статистику

$$\bar{\omega}_n^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{r_i - 1/2}{n} - X_{i1} \dots X_{is} \right)^2 + \frac{2}{n} \left(\left(\frac{1}{2} \right)^s - \left(\frac{1}{3} \right)^s - \frac{1}{8} \right),$$

совпадающую при $s=1$ с одномерной статистикой ω_n^2 , а при $s \geq 2$ эта статистика имеет то же самое математическое ожидание, что и ω_n^2 , т. е. $2^{-s} - 3^{-s}$, независимо от n .

Статистики $\hat{\omega}_n^2$ и $\bar{\omega}_n^2$ имеют такое же предельное распределение, что и ω_n^2 . Это следует из того, что статистика ω_n^2 и статистика

$$\omega_{n1}^2 = n \int_{C_s} (F_n(x) - G(x))^2 dG_n(x)$$

имеют одинаковое предельное распределение, а это следует из того, что статистика ω_n^2 может быть представлена в виде

$$\omega_n^2 = \omega_{n1}^2 + n \int_{C_s} (F_n(x) - G(x))^2 d(G(x) - G_n(x)),$$

и распределение многомерной статистики Колмогорова — Смирнова

$$\sup_{x \in C_s} \sqrt{n} |F_n(x) - G(x)|$$

сходится к предельному (Ченцов, 1958; Нойхауз, 1971). Следовательно $\omega_n^2 - \omega_{n1}^2 \rightarrow 0$ по вероятности.

Таблицы 6 и 7 в приложении содержат значения предельных функций распределения статистики (3) при $s = 2$ и $s = 3$, соответственно.

§ 6. Многовыборочные критерии

Рассмотрим задачу проверки гипотезы о том, что r одномерных выборок $X^{(n, j)} = \{X_1^{(j)}, \dots, X_{n_j}^{(j)}\}$, $j = 1, \dots, r$, взяты из одного и того же непрерывного (вообще говоря, неизвестного) распределения $G(x)$. Пусть $G_{n_j}^{(j)}(x)$ — эмпирическая функция распределения, построенная по j -й выборке, $G_n(x)$ — эмпирическая функция распределения, построенная по объединенной выборке из $n = n_1 + \dots + n_r$ элементов. В этом случае может быть предложена статистика (Кифер, 1959)

$$\omega_{n_1, \dots, n_r}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^r n_j (G_{n_j}^{(j)}(x) - G_n(x))^2 dG_n(x). \quad (1)$$

Если число выборок равно двум, то в этом случае статистика преобразовывается к виду

$$\omega_{n,m}^2 = \frac{nm}{n+m} \int_{-\infty}^{\infty} (G_n^{(1)}(x) - G_m^{(2)}(x))^2 dG_{n+m}(x). \quad (2)$$

Подобные статистики рассматривались также в работах Диксона (1940), Лемана (1951), Сандрама (1954), Розенблатта (1952), Фиша (1960), Андерсона (1962), Вегнера (1956). В работе Петита (1976) введена двухвыборочная статистика, аналогичная одновыборочной статистике Андерсона — Дарлингса A_n^2 .

Рассмотрим вопрос о предельном распределении статистики $\omega_{n,m}^2$. Аналогично тому, как это было сделано в § 2, можно доказать, что статистика $\omega_{n,m}^2$ имеет то же самое предельное распределение, что и статистика

$$\omega_{n,m}^2 = \frac{nm}{n+m} \int_{-\infty}^{\infty} (G_n^{(1)}(x) - G_m^{(2)}(x))^2 dG(x).$$

Отсюда, учитывая, что случайные процессы $\sqrt{n} \times (G_n^{(1)}(x) - G(x))$ и $\sqrt{m} (G_m^{(2)}(x) - G(x))$ слабо сходятся в L_2 к некоторым гауссовским процессам, а рассматриваемые функционалы непрерывны, мы можем заключить, что статистика $\omega_{n,m}^2$ имеет такое же предельное распределение, что и статистика W_n^2 .

Аналогично можно доказать, что предельное распределение статистики $\omega_{n_1, \dots, n_k}^2$ совпадает с $(k-1)$ -кратной сверткой предельного распределения статистики W_n^2 . Предельные распределения статистик (1) и (2) не зависят от неизвестного распределения $G(x)$. Попытка обобщения статистики (2) на многомерный случай приводит к тому, что эти статистики оказываются зависящими от неизвестного распределения.

На практике значения статистики (2) следует вычислять по формуле

$$\omega_{n,m}^2 = \frac{1}{nm(n+m)} \left[n \sum_{i=1}^n (r_i - i)^2 + m \sum_{j=1}^m (s_j - j)^2 \right] - \frac{4mn-1}{6(m+n)}, \quad (3)$$

где r_i и s_j — ранги наблюдений первой и второй выборок в объединенной выборке.

Поскольку статистика $\omega_{n,m}^2$ сравнительно просто выражается через ранги наблюдений по формуле (3), оказывается возможным точно вычислить ее распределение при небольших значениях n и m . Эти методы описаны, например, в работах Бара (1963, 1964). В этих же работах приведена формула для преобразования статистики $\omega_{n,m}^2$ к статистике, менее зависящей от n и m .

§ 7. Критерий симметрии

Критерии типа ω^2 могут применяться для проверки гипотезы о симметрии относительно $x = 0$ функции распределения $F(x)$ по наблюдениям X_1, \dots, X_n , т. е. $H_0: F(x) = 1 - F(-x)$. Соответствующая статистика ω^2 имеет вид

$$\omega_n^2 = n \int_{-\infty}^{\infty} [F_n(x) + F_n(-x) - 1]^2 dF_n(x). \quad (1)$$

Пусть $X_{(1)} \leq \dots \leq X_{(n)}$ — упорядоченная выборка X_1, \dots, X_n . Вычисление значений статистики (1) удобно производить по формуле

$$\omega_n^2 = \sum_{j=1}^n \left[F_n(-X_{(j)}) - \frac{n-j+1}{n} \right]^2. \quad (2)$$

Найдем предельное распределение статистики (1). Аналогично тому, как это было сделано в § 4, получаем, что ω_n^2 имеет то же самое предельное распре-

деление, если справедлива нулевая гипотеза, что и случайная величина

$$T_n = n \int_{-\infty}^{\infty} [F_n(x) - F(x) + F_n(-x) - F(-x)]^2 dF(x) = \\ = n \int_0^1 [F_n^*(t) - t + F_n^*(1-t) - (1-t)]^2 dt. \quad (3)$$

Здесь $F_n^*(t)$ — эмпирическая функция распределения, построенная по преобразованной выборке $t_i = F^{-1}(X_i)$, $i = 1, \dots, n$. Представив (2) в виде

$$\omega_n^2 = \sum_{j=1}^n \left[F_n^*(1 - t_{(j)}) - \frac{n-j+1}{n} \right]^2,$$

закключаем, что распределение ω_n^2 при всех n , а следовательно, и предельное распределение, не зависят от неизвестной функции распределения $F(x)$. Предельное распределение статистики совпадает с распределением случайной величины

$$\omega^2 = 2 \int_0^{1/2} [\xi(t) + \xi(1-t)]^2 dt = \int_0^1 \omega^2(t) dt,$$

где $\xi(t)$ — гауссовский случайный процесс с корреляционной функцией $K_0(t, \tau) = \min(t, \tau) - t\tau$, а $\omega(t)$ — стандартный винеровский процесс на $[0, 1]$, т.е. гауссовский процесс с корреляционной функцией $K(t, \tau) = \min(t, \tau)$. Это следует из того, что гауссовский процесс $\xi(t) + \xi(1-t)$ имеет, как легко вывести, корреляционную функцию $2 \min(t, \tau)$ при $\max(t, \tau) < 1/2$.

Собственные числа корреляционного оператора, соответствующего винеровскому процессу на $[0, 1]$, есть $(n - 1/2)^2 \pi^2$, $n = 1, 2, \dots$, а соответствующий определитель Фредгольма есть $D(\lambda) = \cos \sqrt{\lambda}$.

Предельное распределение статистики ω_n^2 может быть, во-первых, вычислено по формуле Смирнова и другими методами, описанными в третьей главе, а, во-вторых, по формуле, полученной в работе Ротмана и Вудруфа (1972). Существуют рекуррентные формулы (см., например, Сривасан и Годио, 1974),

позволяющие при небольших значениях n вычислять точные значения функции распределения.

В работе Холландера (1971) рассмотрен критерий типа ω^2 для проверки симметрии двумерной функции распределения по ее аргументам, т. е. проверяется гипотеза $H_0: F(x, y) = F(y, x)$.

§ 8. Критерии независимости

Критерии независимости типа ω^2 рассматривались в работах Гефдинга (1948), Ченцова (1958), Блюма, Кифера и Розенблатта (1961), Дюге (1975) и других авторов.

Пусть заданы наблюдения X_1, \dots, X_n s -мерной случайной величины $X \in R^s$ с функцией распределения $F(x)$, $X_i = (X_{i1}, \dots, X_{is})$. Проверяется гипотеза о независимости координат вектора X , т. е.

$$H_0: F(x) = {}_1F(x_1) \dots {}_sF(x_s),$$

где ${}_iF(x_i)$ — непрерывные одномерные функции распределения. Статистику ω_n^2 для проверки H_0 зададим в виде

$$\omega_n^2 = n \int_{R^s} (F_n(x) - {}_1F_n(x_1) \dots {}_sF_n(x_s))^2 dF_n(x), \quad (1)$$

где $F_n(x)$ — эмпирическая функция распределения, определенная в § 4, а ${}_iF_n(x_i)$ — одномерные эмпирические функции распределения, построенные по наблюдениям i -й координаты X_{1i}, \dots, X_{si} .

Значения статистики ω_n^2 могут быть вычислены по формуле

$$\omega_n^2 = \sum_{i=1}^n (F_n(X_i) - {}_1F_n(X_{i1}) \dots {}_sF_n(X_{is}))^2. \quad (2)$$

Произведя по координатное преобразование $T_{ij} = {}_jF(X_{ij})$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, s$, не изменяющее значения статистики ω_n^2 из (2), легко вывести, что распределение статистики ω_n^2 при нулевой гипотезе и каждом значении n не зависит от неизвестных функций распределения ${}_jF(x_j)$, $j = 1, \dots, s$.

Предельное распределение статистики $\bar{\omega}_n^2$ существует и находится способом, аналогичным способу нахождения предельного распределения критериев симметрии. Это распределение совпадает с распределением случайной величины

$$\int_{C_s} \xi^2(t) dt, \quad (3)$$

где $\xi(t)$ — гауссовское случайное поле на s -мерном единичном кубе C_s с нулевым математическим ожиданием и некоторой корреляционной функцией $K_s(t, \tau)$, $t, \tau \in C_s$, $t = (t_1, \dots, t_s)$, $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_s)$. Можно найти, что при $s = 2, 3$

$$\begin{aligned} K_2(t, \tau) &= (\min(t_1, \tau_1) - t_1\tau_1)(\min(t_2, \tau_2) - t_2\tau_2), \\ K_3(t, \tau) &= \min(t_1, \tau_1) \min(t_2, \tau_2) \min(t_3, \tau_3) - \\ &\quad - t_2t_3\tau_2\tau_3 \min(t_1, \tau_1) - t_1t_3\tau_1\tau_3 \min(t_2, \tau_2) - \\ &\quad - t_1t_2\tau_1\tau_2 \min(t_3, \tau_3) + 2t_1t_2t_3\tau_1\tau_2\tau_3. \end{aligned}$$

Собственные значения ядра $K_2(t, \tau)$ есть $\lambda_{jk} = \pi^4 j^2 k^2$, $j, k = 1, 2, \dots$. Собственные значения ядра $K_3(t, \tau)$ не найдены.

Имеется возможность уклониться от нахождения собственных значений ядра $K_3(t, \tau)$ путем усложнения критерия трехмерной независимости. Пусть $_{jk}F_n(x_j, x_k)$ — двумерная эмпирическая функция распределения, построенная по выборке $(X_{1j}, X_{1k}), (X_{2j}, X_{2k}), \dots, (X_{nj}, X_{nk})$. Введем статистику

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_n^2 &= \int_{R^3} (F_n(x) - {}_1F_n(x_1) {}_23F_n(x_2, x_3) - \\ &\quad - {}_2F_n(x_2) {}_13F_n(x_1, x_3) - {}_3F_n(x_3) {}_12F_n(x_1, x_2) + \\ &\quad + 2 {}_1F_n(x_1) {}_2F_n(x_2) {}_3F_n(x_3))^2 dF_n(x). \end{aligned}$$

Предельное распределение $\bar{\omega}_n^2$ совпадает с предельным распределением случайной величины вида (3), причем корреляционная функция процесса $\xi(t)$ есть

$$K(t, \tau) = \prod_{i=1}^3 (\min(t_i, \tau_i) - t_i\tau_i).$$

Собственные значения корреляционного оператора с таким ядром есть $\pi^6 i^2 j^2 k^2$, где $i, j, k = 1, 2, \dots$

Критерий, использующий статистику $\bar{\omega}_n^2$, оказывается слабочувствительным к некоторым альтернативам, например, вида

$$H_1^*: F(x) = {}_1F(x_1) {}_{23}F(x_2, x_3),$$

поскольку, как легко найти, математическое ожидание процесса $\xi(t)$ при H_1^* равно нулю. Предельные распределения статистики $\bar{\omega}_n^2$ при H_0 и H_1^* существуют, но различны. Для того чтобы при увеличении n вероятность различения H_0 и H_1^* стремилась к 1, следует воспользоваться статистикой

$$C_n^2 = n({}_{12}\omega_n^2 + {}_{13}\omega_n^2 + {}_{22}\omega_n^2 + b\bar{\omega}_n^2),$$

где $b > 0$ — произвольно выбираемая константа, влияющая на мощность критерия по отношению к конкретным альтернативам, а ${}_{ij}\omega_n^2$ — это статистики, используемые для проверки гипотезы о двумерной независимости i -й и j -й координат наблюдаемого случайного вектора,

$${}_{ij}\omega_n^2 = \int_{R^2} ({}_{ij}F_n(x_i, x_j) - {}_iF_n(x_i) {}_jF_n(x_j))^2 d_{ij}F_n(x_i, x_j).$$

Статистика C_n^2 имеет предельное распределение, совпадающее с распределением случайной величины вида (3). Вычисляя взаимные корреляционные функции случайных процессов, связанных с частными статистиками, входящими в C_n^2 , можно показать, что эти процессы, а следовательно и статистики, взаимно независимы. Следовательно, характеристическая функция предельного распределения статистики C_n^2 есть

$$\varphi(t) = \prod_{j, k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{2it}{\pi^4 j^2 k^2}\right)^{-3/2} \prod_{j, k, l=1}^{\infty} \left(1 - \frac{2bit}{\pi^6 j^2 k^2 l^2}\right)^{-1/2}.$$

Варианты статистик ω_n^2 для проверки гипотезы о многомерной независимости рассмотрены в работе Дюге (1975).

В приложении приведены таблицы критерия двумерной независимости и критерия трехмерной независимости при $b = \sqrt{270}$. При таком значении b дисперсии статистик ${}_{12}\omega_n^2 + {}_{13}\omega_n^2 + {}_{23}\omega_n^2$ и $b\bar{\omega}_n^2$ одинаковы (их математические ожидания также примерно одинаковы).

§ 9. Критерии для круговых распределений

Иногда наблюдения X_1, \dots, X_n случайной величины X могут быть представлены как наблюдения точки на окружности единичной длины с заданным началом отсчета. Тогда для упорядоченной выборки выполняется соотношение $0 \leq X_{(1)} \leq \dots \leq X_{(n)} < 1$. Различные свойства случайных величин на окружности описаны в книге Мардиа (1972). Круговые (угловые) распределения задаются вероятностями попадания случайной величины в произвольные дуги. Если эти вероятности равны длинам дуг, то распределение называется равномерным. Для проверки гипотезы о равномерности кругового распределения предложены несколько статистик типа ω^2 . Одной из таких статистик является статистика Ватсона (Ватсон, 1961)

$$U_n^2 = n \int_0^1 \left[F_n(x) - x - \int_0^1 (F_n(y) - y) dy \right]^2 dx.$$

Вычисление значения U_n^2 удобно производить по формуле

$$U_n^2 = \sum_{j=1}^n \left(X_j - \frac{j-1/2}{n} \right)^2 - n \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{12n}.$$

Введенная статистика инвариантна относительно выбора начала отсчета на окружности. Она может, конечно, применяться также и для проверки гипотезы о равномерности распределения на $[0, 1]$.

Предельное распределение статистики U_n^2 совпадает с распределением случайной величины

$$U^2 = \int_0^1 \left(\xi(t) - \int_0^1 \xi(\tau) d\tau \right)^2 dt,$$

где $\xi(t)$ — гауссовский случайный процесс с $E\xi(t) = 0$ и корреляционной функцией $K_0(t, \tau) = \min(t, \tau) - t\tau$. Это вытекает из непрерывности U в L_2 как функционала от $\xi(t)$. Представим далее U^2 в стандартном виде

$$U^2 = \int_0^1 \eta^2(t) dt, \quad (1)$$

где

$$\eta(t) = \xi(t) - \int_0^1 \xi(\tau) d\tau$$

— гауссовский случайный процесс с нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией

$$K(t, \tau) = \min(t, \tau) - \frac{1}{2}(t + \tau) + \frac{1}{2}(t - \tau)^2 + \frac{1}{12}.$$

Собственные значения соответствующего корреляционного оператора двукратны и равны $\lambda_{2i-1} = \lambda_{2i} = 4i^2\pi^2$.

Следовательно, (1) может быть представлена в виде квадратичной формы $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\chi_{2,i}^2}{4i^2\pi^2}$, где $\chi_{2,i}^2$, $i = 1, 2, \dots$, — независимые случайные величины, имеющие распределение χ^2 с двумя степенями свободы. Из формулы (1), выведенной в § 4 главы 3, следует, что предельная функция распределения статистики Ватсона есть

$$P\{U^2 < x\} = 1 - 2 \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j-1} e^{-2j^2\pi^2 x}.$$

Другие статистики типа ω^2 для проверки гипотез о круговых распределениях рассмотрены в работах Айне (1968), Ватсона (1967а), Жине (1975), Стивенса (1965, 1976), Маага (1966) и других.

§ 1. Общие сведения

Как установлено в главе 1, предельное распределение статистики ω_n^2 при нулевой гипотезе совпадает с распределением некоторой квадратичной формы

$$Q = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i^2}{\lambda_i}, \quad (1)$$

где $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$, а величины x_i , $i = 1, 2, \dots$, независимы и имеют нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием и единичными дисперсиями.

В общем случае рассмотрим квадратичную форму

$$P = x'Ax, \quad (2)$$

где вектор x имеет нормальное распределение с вектором математических ожиданий m и корреляционной матрицей Σ , а A — симметрическая матрица. Поскольку Q и Σ^{-1} — вещественные симметрические матрицы, и Σ^{-1} положительно определена, то существует невырожденная матрица T такая, что $T'QT = I$, а $T'\Sigma^{-1}T$ — диагональная матрица (см., например, Барра, 1974). Тогда функция распределения квадратичной формы P совпадает с функцией распределения квадратичной формы

$$Q = \sum_{i=1}^r \frac{x_i^2}{\lambda_i},$$

где x_i , $i = 1, 2, \dots$, — независимые нормально распределенные случайные величины с единичной

дисперсией и математическими ожиданиями δ_i такими, что $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_r)' = Tm$, а величины λ_i , $i = 1, \dots, r$, являются собственными значениями матрицы $A\Sigma$. Если вектор δ нулевой, то квадратичная форма Q называется центральной, в противном случае — нецентральной.

Бесконечная квадратичная форма сходится почти всюду тогда и только тогда, когда

$$\sum_{i=1}^{\infty} |a_i| < \infty. \quad (3)$$

Этот результат доказывается на основе теоремы о трех рядах Колмогорова. Доказательство содержится, например, в книге И. А. Ибрагимова и Ю. А. Розанова (1970). Сходимость квадратичных форм общего вида (2) рассмотрена в работе Варберга (1968).

Класс распределений квадратичных форм включает в себя и класс распределений χ^2 . По аналогии этот класс может быть назван классом распределений ω^2 ¹⁾.

Известны разложения для функций распределения квадратичных форм в степенные ряды, в ряды по полиномам Лагерра и другие разложения. Одна из последних работ с такими рядами принадлежит Гидеону и Герланду (1976). Отметим также книгу М. К. Камалова (1958). Указанные разложения мало пригодны для вычислений. В настоящей главе поэтому рассматриваются методы вычисления значений функций распределения квадратичных форм, связанные с численным интегрированием в преобразованной формуле обращения.

В дальнейшем, группируя в (1) члены с одинаковыми коэффициентами, и допуская, что квадратичная форма может быть неопределенной, будем рассматривать квадратичные формы вида

$$Q_{v,r} = \sum_{i=-v}^r \alpha_i \chi_{s_i, i, \delta_i}^2, \quad (4)$$

причем $\alpha_i \neq \alpha_j$ при $i \neq j$, $s_i \geq 1$, $v \geq -1$, $r \geq 0$, χ_{s_i, i, δ_i} , $i = -v, -v+1, \dots, r$, — независимые случайные величины, имеющие распределение χ^2 с s_i

¹⁾ Название предложено Л. Н. Большевым.

степенями свободы и параметрами нецентральностей δ_i , $\alpha_i < 0$, $i \leq 0$, $\alpha_i > 0$ при $i \geq 1$. Величина s_i будет называться кратностью коэффициента α_i .

Условие $\alpha_i \neq \alpha_j$ не является ограничительным, поскольку сумма двух независимых случайных величин, имеющих распределение χ^2 с числами степеней свободы n_i и n_j и параметрами нецентральностей δ_i и δ_j , есть снова случайная величина, имеющая распределение χ^2 с числом степеней свободы $n_i + n_j$ и параметром нецентральности $\delta_i + \delta_j$.

При $r = \infty$ квадратичная форма называется бесконечной. В дальнейшем индекс v будет иногда опускаться, а при $r = \infty$ будет опускаться также и индекс r .

Характеристическая функция $Q_{v,r}$ имеет вид

$$\varphi_{v,r}(t) = \prod_{j=-v}^r (1 - 2it\alpha_j)^{-s_j/2} \exp \left\{ \frac{\delta_j \alpha_j it}{1 - 2i\alpha_j t} \right\}$$

(см. Барра, 1974).

Функция распределения квадратичной формы как конечной, так и бесконечной, непрерывна, а функция распределения положительно определенной ($v = -1$) квадратичной формы при $x = 0$ обращается в нуль. Эти два свойства следуют из того, что функция распределения квадратичной формы является сверткой некоторой функции распределения с функцией распределения случайной величины $\alpha_1 \chi_1^2$.

В дальнейшем, если речь идет о вычислении функции распределения неопределенной квадратичной формы, рассматриваются формулы для функции распределения при положительных значениях аргумента. Для вычисления этой функции распределения при остальных значениях аргумента следует умножить квадратичную форму на -1 и применять ту же самую формулу.

При вычислении функций распределения бесконечных квадратичных форм, связанных, например, с критериями типа ω^2 , может оказаться, что отбрасывание членов ряда (1) с номерами, большими даже нескольких сотен, может привести к существенным ошибкам в значениях функции распределения. В этом случае остаток ряда (1) удобно аппроксими-

ровать случайной величиной с распределением $a\chi_b^2$ (Дёрбин, 1970) или линейной комбинацией нескольких случайных величин такого типа. Величина a и b или коэффициенты аппроксимирующей квадратичной формы находятся путем уравнивания нескольких моментов аппроксимирующей случайной величины и остатка.

§ 2. Формула Смирнова

Пусть все λ_i в формуле (1.1) различны. Формулу обращения для характеристической функции запишем в виде

$$F_r(x) - F_r(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty - i}^{\infty + i} \frac{(1 - e^{-\lambda x/2})}{\lambda \sqrt{D_{v,r}(2it)}} d\lambda, \quad (1)$$

где

$$D_{v,r}(\lambda) = \prod_{j=-v}^r (1 - 2it/\lambda_j).$$

Если число членов Q с положительными коэффициентами нечетно, то добавим еще один (нулевой) член, так что r оказывается четным и $\lambda_r = \infty$. Произведем разрезы в комплексной плоскости по действительной оси по отрезкам $[\lambda_{2k-s}, \lambda_{2k}]$. Выбрав ветвь подынтегральной функции в (1), соответствующую характеристической функции, получаем, что на верхнем берегу разреза $[\lambda_1, \lambda_2]$ подынтегральная функция принимает действительные отрицательные значения. Определив знаки подынтегральной функции на нижнем берегу и на остальных берегах разрезов, устанавливаем, что при переходе в (1) к интегрированию по разрезам, учитывая условие $F_r(\infty) = 1$, получаем следующую формулу:

$$F_r(x) = 1 + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{r/2} (-1)^k \int_{\lambda_{2k-1}}^{\lambda_{2k}} \frac{e^{-x\lambda/2}}{(-D_{v,r}(\lambda))^{1/2}} \frac{d\lambda}{\lambda}, \quad (2)$$

$$x \geq 0.$$

Впервые эта формула была получена Смирновым (1937), однако в ней был пропущен множитель

$(-1)^k$, который был добавлен в дальнейшем авторами нескольких работ.

Заметим, что формула (2) справедлива даже при бесконечном значении v , если только выполнено условие (1.3). Эта формула при бесконечном значении r рассматривается в следующем параграфе.

При интегрировании в (2) удобно произвести следующие замены переменных под знаком интеграла. Если k -й интеграл в (2) берется по конечному интервалу $(\lambda_{2k-1}, \lambda_{2k})$, то, полагая $\lambda = p_k(z) = [(\lambda_{2k} - \lambda_{2k-1})z + \lambda_{2k} + \lambda_{2k-1}]/2$, получаем для него выражения

$$\int_{-1}^1 \frac{e^{-p_k(z) x/2} [(p_k(z) - \lambda_{2k-1})(\lambda_{2k} - p_k(z))]^{1/2} dz}{p_k(z) (-D_{v,r}(p_k(z)))^{1/2} \sqrt{1-z^2}}.$$

При $\lambda_r = \infty$ последний интеграл в (2) путем замены переменной $\lambda = p_{r/2}(z) = 2\lambda_{r-1}/(1-z)$ приводится к виду

$$\int_{-1}^1 \frac{e^{-p_{r/2}(z) x/2} (p_{r/2}(z) - \lambda_{r-1})^{1/2} dz}{(-\lambda_{r-1} D_{v,r}(p_{r/2}(z)))^{1/2} \sqrt{1-z^2}}.$$

Оба полученных интеграла могут вычисляться по квадратурной формуле

$$\int_{-1}^1 \frac{f(z)}{\sqrt{1-z^2}} dz = \frac{\pi}{m} \sum_{k=1}^m f(z_k) + R_m,$$

где $z_k = \cos \frac{2k-1}{2m} \pi$, а R_m — остаточный член (см., например, Крылов и Шульгина (1966)). Функция $f(z)$ в рассматриваемых случаях не имеет особенностей в интервале интегрирования.

В работе Грэда и Соломона (1955) последний интеграл в (2) приводится к интервалу $(-\infty, \infty)$.

Возможно произвести некоторые обобщения формулы Смирнова на случай, когда коэффициенты квадратичной формы могут быть не однократными. Обобщенная формула Смирнова содержится в работе автора (1977).

§ 3. Формула Смирнова для бесконечных квадратичных форм

Формальное распространение формулы Смирнова (2.2) на случай бесконечных квадратичных форм ($r = \infty$) приводит к формуле для их функции распределения

$$F(x) = 1 + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \int_{\lambda_{2k-1}}^{\lambda_{2k}} \frac{e^{-x\lambda/2}}{(-D(\lambda))^{1/2}} \frac{d\lambda}{\lambda}, \quad x \geq 0, \quad (1)$$

где $D(\lambda) = D_{v, \infty}(\lambda)$. Заметим, однако, что даже если последовательность $\{\lambda_i\}$ удовлетворяет условию (1.3), ряд в правой части (1) может оказаться расходящимся.

Из условия (1.3), учитывая, что квадратичная форма

$$Q_r = \sum_{i=1}^r \frac{1}{\lambda_i} x_i^2$$

сходится по вероятности к бесконечной квадратичной форме

$$Q = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} x_i^2, \quad (2)$$

следует, что функция распределения Q_r сходится к функции распределения Q в каждой точке (Лозв, 1962, стр. 180).

Введем следующее условие.

Условие С. Существует такое $Y \geq 0$, что для каждого $x \geq Y$ найдется такое число K , что члены ряда (1), начиная с номера K , монотонно стремятся по абсолютной величине к нулю.

При выполнении условия С ряд (1) сходится как знакопеременный ряд с убывающими членами.

Доказательства следующих результатов этого параграфа можно найти в работе автора (1975).

Л е м м а 1. *При выполнении условий (1.3) и С функция распределения квадратичной формы Q_{2n} сходится в каждой точке к функции, даваемой рядом (1).*

Следствие 1. При выполнении условий (1.3) и С функция распределения квадратичной формы Q представлена формулой Смирнова (1).

Обратимся к нахождению условий, накладываемых на последовательность $\{\lambda_i\}$, из которых следует условие С, но которые удобнее при их проверке. Введем следующие последовательности чисел:

$$T_{k1} = \frac{1}{\lambda_{2k+1} - \lambda_{2k}} \ln \left(\frac{\lambda_{2k+2} - \lambda_{2k-1}}{\lambda_{2k+1} - \lambda_{2k}} \cdot \frac{\lambda_{2k}^2}{\lambda_{2k+1}^2} \right),$$

$$T_{k2} = \frac{\lambda_{2k+2} - \lambda_{2k-1}}{\lambda_{2k+1} - \lambda_{2k}} \sum_{s=2k+3}^{\infty} \frac{1}{\lambda_s - \lambda_{2k+2}},$$

$$T_k = T_{k1} + T_{k2}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Асимптотические свойства этих последовательностей зависят только от асимптотического поведения положительных коэффициентов квадратичной формы.

Теорема 1. Пусть выполнено условие (1.3) и ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_{2k+1} - \lambda_{2k})$$

расходится; тогда члены ряда (1) монотонно стремятся к нулю по абсолютной величине при $x \geq \sup_{k > K} T_k$, и, следовательно, ряд (1) сходится $x > \limsup_k T_k$.

Теорема 2. Пусть выполнено условие (1.3), члены последовательности $\Delta_i = \lambda_{i+1} - \lambda_i$, $i = 1, 2, \dots$, монотонно возрастают, начиная с некоторого номера, и существует предел $\lim_i \Delta_{i+1}/\Delta_i < \infty$. Тогда $\limsup_k T_k = 0$.

Следствие 2. Если $\lambda_{i+k} = (Ci)^\alpha + o(i^{\alpha-2})$, где $1 < \alpha < \infty$, $C > 0$, k — некоторые константы, то $\limsup_k T_k = 0$.

Теорема 3. Формула Смирнова (1) применима для представления предельных функций распределения статистик Смирнова W_n^2 и Андерсона — Дарлингга A_n^2 .

Эта теорема следует из следствия 2.

При вычислении по формуле (1) предельных функций распределения некоторых статистик удается $D(\lambda)$

выразить в простом виде. Так, для статистики Смирнова W_n^2

$$D(\lambda) = \frac{\sin \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}},$$

а для статистики Андерсона — Дарлингса A_n^2

$$D(\lambda) = -\frac{1}{\pi\lambda} \cos\left(\frac{\pi}{2} \sqrt{1+4\lambda}\right).$$

Аналогичные формулы для определителей Фредгольма можно составить и для ряда других статистик.

При вычислении предельной функции распределения статистики W_n^2 по формуле (1) оказывается, что при вычислении вероятностей, превышающих 0,98, с точностью в семь значащих цифр достаточно взять только один интеграл.

§ 4. Квадратичные формы с двукратными коэффициентами

Для квадратичной формы вида (1.4) с коэффициентами четной кратности, $s_i = 2m_i$, $i = 1, 2, \dots, r$, можно вывести конечную формулу для ее функции распределения (см., например, работу автора, 1975). Нетрудно получить формулу для функции распределения квадратичных форм с двукратными коэффициентами

$$F_r(x) = 1 - \sum_{k>0} e^{-\lambda_k x/2} \prod_{j \neq k} \frac{1}{1 - \lambda_k \alpha_j}, \quad x \geq 0. \quad (1)$$

Рассмотрим условия, при которых возможно равенство

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \prod_{j=1}^{\infty} \frac{1}{1 - 2it\alpha_j} dt = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k e^{-\lambda_k x/2}}{2} \prod_{j \neq k} \frac{1}{1 - \lambda_k \alpha_j},$$

$$x \geq 0, \quad v \geq -1. \quad (2)$$

Эти условия получены в теории рядов Дирихле (см., например, Мандельброт, 1973, стр. 75). Равенство (2) определяет ряд для функции плотности положительно определенной квадратичной формы с четными кратностями коэффициентов.

Для справедливости (2) достаточно выполнения следующих условий: $\liminf_n (\lambda_{n+1} - \lambda_n) > 0$ и существует постоянная k такая, что $|\sqrt{\lambda_i} - n| < k$. Почленным интегрированием правой части в (2) (что приводит к абсолютно сходящемуся ряду) мы можем получить формулу (1) для функции распределения.

§ 5. Квадратичные формы общего вида

В настоящем параграфе будет получена формула для функции распределения квадратичных форм общего вида (1.4). Из формулы обращения для характеристической функции следует, что функция распределения квадратичной формы Q_r есть

$$F_r(x) - F_r(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty i}^{\infty i} \frac{1}{\lambda} (1 - e^{-\lambda x/2}) z(\lambda) d\lambda, \quad x > 0, \quad (1)$$

где

$$z(\lambda) = \prod_{k=-v}^r \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_k}\right)^{-s_k/2} \exp\left\{\frac{\delta_k \lambda}{2(\lambda_k - \lambda)}\right\}.$$

Интеграл от модуля подынтегральной функции в (1) по полуокружности радиуса R , расположенной в правой полуплоскости и имеющей центр в точке $\lambda = 0$, при $R \rightarrow \infty$ стремится к нулю. Поэтому от интегрирования по мнимой оси в (1) можно перейти к интегрированию по произвольному контуру T , не проходящему через $\lambda = 0$, но проходящему через бесконечность, лежащему в правой полуплоскости и содержащему внутри себя все особые точки, кроме $\lambda = 0$. Для простоты выберем контур T , состоящий из двух лучей

$$\lambda = (a + i)t$$

и

$$\lambda = (a - i)t, \quad t \geq \varepsilon, \quad a \geq 0,$$

и дуги окружности C_ε радиуса $\varepsilon \sqrt{a^2 - 1}$. Так как функция $z(\lambda)/\lambda$ равномерно ограничена на T , то из

условия $F_r(\infty) = 1$ получим, что

$$F_r(x) = 1 - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\varepsilon} \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x/2} z(\lambda) d\lambda - \\ - \frac{1}{\pi} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{1}{\lambda} \operatorname{Im} \{e^{-\lambda x/2} z(\lambda)\} d\lambda.$$

Представив каждый сомножитель подынтегральной функции в виде $\sigma e^{i\varphi}$ и перейдя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, получим, что

$$F_r(x) = 1 - \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{1}{a} - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-atx/2} \sin(\theta(t, x))}{\rho(t)} dt, \\ x \geq 0, \quad (2)$$

где

$$\theta(t, x) = \sum_{k=-v}^r \left\{ \frac{s_k}{2} \omega_k(t) + \frac{\lambda_k \delta_k t}{2 [(\lambda_k - at)^2 + t^2]} \right\} - \frac{tx}{2}, \\ \rho(t) = t \prod_{k=-v}^r \left\{ \left[\left(1 - \frac{at}{\lambda_k}\right)^2 + \frac{t^2}{\lambda_k^2} \right]^{s_k/4} \times \right. \\ \left. \times \exp \left\{ -\frac{\delta_k t [a\lambda_k - (a^2 + 1)t]}{2 [(\lambda_k - at)^2 + t^2]} \right\} \right\}, \\ \omega_k(t) = \operatorname{arctg} \frac{\lambda_k - at}{t}.$$

В работе Имгофа (1961) формула (2) выведена при $a=0$ (с заменой $\operatorname{arctg} \frac{1}{a}$ на $\frac{\pi}{2}$). Формула общего вида получена в работе автора (1975). Выбор значения a , отличного от нуля при достаточно больших значениях x , приводит к тому, что в числителе появляется экспоненциально убывающий множитель, в то время как функции $\theta(t, x)$ и $\rho(t)$ изменяются сравнительно слабо. В результате на участке, где подынтегральная функция существенно отлична от нуля, она совершает меньшее число колебаний. Чрезмерно большое значение a приводит к тому, что функция $\rho(t)$ будет принимать при некоторых значениях

t слишком малые значения, что затруднит вычисления. При малых значениях x выбор отличного от нуля значения a не дает выигрыша при численном интегрировании.

Применим описанный метод для нахождения функции распределения $\chi^2_{n, \delta}$, где n — число степеней свободы, а δ — параметр нецентральности. В формуле (1) перейдем к интегрированию по окружности единичного радиуса вокруг точки $\lambda = 1$ и разрезу вдоль действительной оси в интервале $(2, \infty)$. Можно получить формулу

$$\begin{aligned} P\{\chi^2_{n, \delta} < x\} = \\ = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{1}{\sin \frac{\varphi}{2}} \exp\left\{-\frac{x+\delta}{2}(1-\cos \varphi)\right\} \times \\ \times \sin\left(\frac{n-1}{2}\varphi - \frac{x-\delta}{2}\sin \varphi\right) d\varphi + R_n(x, \delta), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} R_n(x, \delta) = \frac{(-1)^{[n/2]}}{\pi} \int_2^\infty \frac{1}{\lambda \sqrt{(\lambda-1)^n}} \times \\ \times \exp\left\{-\frac{\lambda}{2}\left(x + \frac{\delta}{\lambda-1}\right)\right\} d\lambda \end{aligned}$$

при нечетных n , и

$$R_n(x, \delta) = 0$$

при четных n . При $n \rightarrow \infty$ $R_n(x, \delta)$ быстро стремится к нулю в области значений x , примыкающих к математическому ожиданию $\chi^2_{n, \delta}$, т. е. $n + \delta$.

В качестве другого примера выведем формулу для функции нецентрального F -распределения. Соответствующая функция распределения имеет вид

$$\begin{aligned} F(x; s_1, s_0, \delta_1) = P\left\{\frac{s_0 \chi^2_{s_1, 1, \delta_1}}{s_1 \chi^2_{s_0, 0, 0}} < x\right\} = \\ = P\{s_0 \chi^2_{s_1, 1, \delta_1} - x s_1 \chi^2_{s_0, 0, 0} < 0\}. \end{aligned}$$

Таким образом, задача сводится к нахождению значения функции распределения квадратичной формы $-x \chi^2_{s_0, 0, 0} + \chi^2_{s_1, 1, \delta}$ в нуле.

По общей формуле (2), полагая

$$a = 0, \quad v = 0, \quad r = 1, \\ \lambda_0 = -\frac{1}{x}, \quad \lambda_1 = 1, \quad \delta_0 = 0, \quad y = \frac{s_1 x}{s_0},$$

имеем

$$F(x; s_1, s_0, \delta_1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\exp \{-\delta_1 t^2 / (2(1+t^2))\}}{t(1+t^2 y^2)^{s_0/4} (1+t^2)^{s_1/4}} \times \\ \times \sin \left(\frac{s_1}{2} \operatorname{arctg} y - \frac{s_0}{2} \operatorname{arctg}(yt) + \frac{\delta_1 t}{2(1+t^2)} \right) dt.$$

Таблицы предельных функций распределение статистик ω_n^2 *)

Т а б л и ц а 1
Критерий Смирнова W^2

x	Δx									
	000	005	010	015	020	025	030	035	040	045
0,000	00000	00000	00001	00038	00300	01041	02383	04299	06685	09415
050	12372	15459	18602	21744	24844	27874	30814	33654	36386	39005
100	41513	43909	46196	48378	50457	52440	54329	56130	57846	59482
150	61042	62531	63951	65306	66600	67837	69019	70148	71229	72263
200	73253	74201	75109	75980	76814	77615	78383	79121	79829	80509
0,250	81163	81791	82396	82977	83536	84075	84593	85092	85573	86036
300	86483	86913	87329	87729	88115	88488	88848	89195	89531	89854
350	90167	90470	90762	91044	91317	91581	91836	92082	92321	92552
400	92775	92991	93201	93403	93599	93789	93972	94150	94323	94489
450	94651	94808	94960	95107	95249	95387	95521	95651	95777	95898
0,500	96017	96131	96243	96350	96455	96556	96655	96750	96843	96933
550	97020	97104	97186	97266	97343	97418	97491	97562	97630	97697
600	97762	97825	97886	97945	98002	98058	98112	98165	98216	98266
650	98314	98361	98406	98450	98493	98535	98575	98615	98653	98690
700	98726	98761	98795	98829	98861	98892	98922	98952	98981	99009
0,750	99036	99062	99088	99113	99137	99160	99183	99205	99227	99248
800	99268	99288	99308	99326	99345	99362	99380	99396	99413	99429
850	99444	99459	99474	99488	99502	99515	99528	99541	99553	99565
900	99577	99588	99599	99610	99621	99631	99641	99650	99660	99669
950	99678	99686	99695	99703	99711	99718	99726	99733	99740	99747

*) В таблицах 1—11 представлены своими десятичными знаками вероятности $P(\omega^2 < x + \Delta x)$. Значения числа Δx представлены также десятичной частью; его целая часть равна нулю.

Таблица 1 (продолжение)

x	Δx									
	00	02	04	06	08	10	12	14	16	18
1,00	99754	99779	99802	99822	99840	99856	99871	99884	99896	99906
20	99916	99924	99932	99939	99945	99950	99955	99960	99964	99968
40	99971	99974	99976	99979	99981	99983	99984	99986	99987	99989
60	99990	99991	99992	99993	99993	99994	99995	99995	99996	99996
80	99996	99997	99997	99997	99998	99998	99998	99998	99998	99999

Таблица 2

Критерий Андерсона — Дарлингa A^2

x	Δx									
	00	02	04	06	08	10	12	14	16	18
0,00	00000	00000	00000	00000	00000	00001	00019	00079	00227	00507
20	00957	01604	02456	03512	04760	06183	07757	09461	11272	13166
40	15125	17130	19165	21216	23270	25317	27350	29359	31340	33288
60	35199	37070	38899	40683	42423	44117	45764	47366	48921	50431
80	51896	53317	54695	56030	57323	58576	59790	60966	62104	63206
1,00	64273	65306	66306	67274	68212	69120	69999	70850	71674	72473
20	73246	73995	74721	75424	76105	76765	77405	78025	78526	79208
40	79773	80321	80852	81367	81867	82352	82823	83279	83722	84152
60	84570	84975	85369	85751	86122	86482	86832	87172	87503	87824
80	88136	88439	88734	89020	89299	89570	89833	90089	90338	90581
2,00	90816	91045	91268	91485	91697	91902	92102	92297	92486	92671
20	92850	93025	93196	93361	93523	93680	93833	93982	94128	94269
40	94407	94542	94673	94800	94925	95046	95164	95279	95391	95501
60	95607	95711	95813	95912	96008	96102	96194	96283	96370	96455
80	96538	96619	96698	96775	96850	96923	96995	97064	97132	97199
3,00	97263	97327	97388	97449	97507	97565	97621	97675	97729	97781
20	97831	97881	97929	97977	98023	98068	98112	98155	98197	98238
40	98278	98317	98355	98392	98429	98464	98499	98533	98566	98598
60	98630	98660	98691	98720	98749	98777	98804	98831	98857	98883
80	98908	98932	98956	98979	99002	99024	99046	99067	99088	99108

x	Δx									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4,0	99128	99221	99303	99377	99442	99501	99553	99600	99642	99679
5,0	99713	99742	99769	99793	99814	99834	99851	99866	99880	99892
6,0	99903	99913	99922	99930	99937	99944	99949	99954	99959	99963
7,0	99967	99970	99973	99976	99978	99981	99983	99984	99986	99987
8,0	99989	99990	99991	99992	99993	99993	99994	99995	99995	99996

Таблица 3

Критерий ω^2 нормальности
при неизвестном математическом ожидании

x	Δx									
	000	002	004	006	008	010	012	014	016	018
0,000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0003	0013	0036	0080
020	0149	0248	0876	0533	0715	0921	1145	1385	1636	1896
040	2161	2430	2698	2966	3231	3492	3747	3997	4241	4477
060	4706	4928	5142	5349	5548	5739	5924	6100	6270	6433
080	6589	6739	6882	7019	7150	7276	7396	7511	7621	7726
0,100	7827	7923	8015	8103	8187	8267	8343	8417	8487	8553
120	8617	8678	8737	8792	8846	8897	8945	8992	9036	9079
140	9119	9158	9195	9230	9264	9296	9327	9357	9385	9412
160	9437	9462	9486	9508	9530	9550	9570	9588	9606	9624
180	9640	9656	9671	9685	9699	9712	9724	9736	9748	9759
x	Δx									
	000	004	008	012	016	020	024	028	032	036
0,200	97690	97886	98065	98228	98378	98515	98640	98754	98859	98955
240	99043	99123	99197	99264	99326	99382	99434	99481	99524	99564
280	99600	99633	99664	99692	99717	99741	99762	99782	99800	99816
320	99832	99846	99858	99870	99881	99890	99899	99908	99915	99922
360	99929	99934	99940	99945	99949	99953	99957	99961	99964	99967
0,400	99970	99972	99974	99976	99978	99980	99982	99983	99985	99986
440	99987	99988	99989	99990	99991	99991	99992	99993	99993	99994
480	99994	99995	99995	99996	99996	99996	99997	99997	99997	99997
520	99998	99998	99998	99998	99998	99998	99999	99999	99999	99999
560	99999	99999	99999	99999	99999	99999	99999	99999	99999	99999
0,600	1,0									

Таблица 4

Критерий ω^2 нормальности при неизвестной дисперсии

x	Δx									
	00	01	02	03	04	05	06	07	08	09
0,00	0000	0000	0061	0412	1042	1788	2538	3237	3868	4428
10	4923	5360	5747	6091	6398	6673	6920	7144	7348	7533
20	7702	7857	8000	8132	8253	8365	8469	8566	8655	8738
30	8816	8888	8956	9019	9078	9133	9184	9232	9277	9320
40	9359	9396	9431	9464	9495	9524	9551	9576	9600	9623

Таблица 4 (продолжение)

x	Δx									
	00	01	02	03	04	05	06	07	08	09
0,50	96442	96642	96830	97007	97174	97332	97480	97619	97751	97875
60	97992	98103	98207	98305	98398	98485	98568	98645	98719	98788
70	98854	98916	98975	99030	99082	99131	99178	99222	99264	99303
80	99341	99376	99409	99440	99470	99498	99525	99550	99574	99597
90	99618	99638	99657	99675	99692	99709	99724	99739	99752	99765
1,00	99778	99789	99800	99811	99821	99830	99839	99847	99855	99863
10	99870	99877	99883	99889	99895	99900	99906	99910	99915	99920
20	99924	99928	99931	99935	99938	99941	99945	99947	99950	99953
30	99955	99957	99960	99962	99964	99966	99967	99969	99971	99972
40	99974	99975	99976	99977	99979	99980	99981	99982	99983	99983
1,50	99984	99985	99986	99987	99987	99988	99989	99989	99990	99990
60	99991	99991	99992	99992	99992	99993	99993	99994	99994	99994
70	99994	99995	99995	99995	99996	99996	99996	99996	99996	99997

Таблица 5

Критерий ω^2 нормальности
при двух неизвестных параметрах

x	Δx									
	000	002	004	006	008	010	012	014	016	018
0,000	0000	0000	0000	0000	0000	0001	0008	0030	0079	0166
020	0297	0473	0693	0950	1239	1552	1883	2225	2572	2921
040	3267	3608	3940	4263	4574	4874	5161	5435	5696	5944
060	6180	6403	6614	6814	7003	7181	7349	7507	7656	7796
080	7928	8053	8169	8279	8383	8480	8571	8657	8738	8813
0,100	8885	8952	9015	9074	9129	9181	9230	9276	9320	9360
120	9399	9435	9468	9500	9530	9558	9584	9609	9632	9654
140	9675	9694	9712	9729	9745	9760	9774	9788	9800	9812
160	9823	9834	9843	9853	9861	9869	9877	9884	9891	9898
180	9904	9909	9915	9920	9924	9929	9933	9937	9940	9944
x	Δx									
	000	004	008	012	016	020	024	028	032	036
0,200	99472	99532	99585	99631	99673	99710	99742	99771	99797	99820
240	99840	99858	99874	99888	99900	99912	99921	99930	99938	99945
280	99951	99956	99961	99966	99969	99973	99976	99978	99981	99983
320	99985	99986	99988	99989	99990	99992	99992	99993	99994	99995
360	99995	99996	99996	99997	99997	99997	99998	99998	99998	99998

Т а б л и ц а 6

Критерий ω^2 симметрии

x	Δx									
	00	02	04	06	08	10	12	14	16	18
0,00	00000	00058	01756	05830	10904	16100	21060	25661	29882	33742
20	37272	40506	43478	46216	48748	51097	53281	55319	57225	59012
40	60692	62274	63767	65178	66515	67783	68987	70132	71222	72262
60	73254	74201	75106	75973	76802	77597	78359	79090	79792	80466
80	81113	81736	82334	82910	83465	83998	84513	85008	85485	85946
1,00	86390	86818	87231	87630	88015	88387	88746	89093	89428	89752
20	90065	90367	90660	90942	91216	91481	91737	91984	92224	92456
40	92681	92898	93109	93313	93510	93701	93886	94066	94240	94408
60	94571	94729	94883	95031	95175	95315	95450	95582	95709	95832
80	95952	96068	96181	96290	96396	96499	96598	96695	96789	96880
2,00	96969	97054	97138	97218	97297	97373	97447	97519	97588	97656
20	97722	97786	97847	97908	97966	98023	98078	98131	98183	98234
40	98283	98330	98377	98422	98465	98508	98549	98589	98628	98666
60	98702	98738	98773	98806	98839	98871	98902	98932	98961	98990
80	99017	99044	99070	99096	99120	99144	99167	99190	99212	99233
x	Δx									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3,0	99254	99350	99433	99506	99569	99623	99671	99713	99749	99781
4,0	99808	99832	99853	99872	99888	99902	99914	99925	99934	99942
5,0	99949	99956	99961	99966	99970	99974	99977	99980	99982	99985
6,0	99986	99988	99990	99991	99992	99993	99994	99995	99995	99996
7,0	99996	99997	99997	99998	99998	99998	99998	99999	99999	99999
8,0	99999	99999	99999	99999	99999	99999	1,0			

Т а б л и ц а 7

Критерий ω^2 равномерности распределения
в единичном квадрате

x	Δx									
	000	005	010	015	020	025	030	035	040	045
0,000	00000	00000	00000	00000	00000	00016	00140	00584	01581	03269
050	05658	08656	12126	15919	19900	23958	28003	31972	35819	39513
100	43036	46378	49535	52509	55304	57927	60386	62689	64844	66862
150	68751	70518	72173	73724	75176	76538	77815	79013	80138	81195
200	82188	83123	84002	84830	85610	86345	87039	87693	88311	88894

Таблица 7 (продолжение)

x	Δx									
	000	005	010	015	020	025	030	035	040	045
0,250	89446	89967	90460	90926	91368	91786	92183	92558	92914	93252
300	93572	93876	94165	94439	94700	94947	95182	95406	95618	95820
350	96012	96195	96370	96535	96693	96843	96986	97123	97253	97376
400	97494	97607	97714	97816	97914	98007	98095	98180	98260	98337
450	98411	98481	98548	98612	98673	98731	98787	98840	98890	98939

x	Δx									
	00	01	02	03	04	05	06	07	08	09
0,50	98985	99071	99150	99222	99288	99348	99403	99453	99499	99541
60	99580	99615	99647	99676	99703	99728	99750	99771	99790	99807
70	99823	99838	99851	99864	99875	99885	99894	99903	99911	99918
80	99925	99931	99937	99942	99947	99951	99955	99959	99962	99965
90	99968	99970	99973	99975	99977	99979	99981	99982	99984	99985
1,00	99986	99987	99988	99989	99990	99991	99992	99992	99993	99993
10	99994	99994	99995	99995	99996	99996	99996	99997	99997	99997
20	99997	99998	99998	99998	99998	99998	99998	99999	99999	99999

Таблица 8

Критерий ω^2 равномерности распределения в единичном кубе

x	Δx									
	000	005	010	015	020	025	030	035	040	045
0,000	0000	0000	0000	0000	0000	0003	0044	0206	0556	1087
050	1747	2469	3199	3900	4551	5144	5675	6147	6565	6933
100	7257	7543	7795	8018	8216	8391	8547	8686	8810	8921
150	9021	9111	9191	9264	9329	9389	9443	9491	9535	9576
200	9612	9645	9675	9703	9728	9751	9772	9791	9808	9824
0,250	98387	98520	98642	98753	98855	98949	99034	99113	99185	99251
300	99311	99367	99418	99465	99508	99547	99583	99617	99647	99675
350	99701	99725	99747	99767	99785	99802	99818	99832	99846	99858
400	99869	99879	99889	99897	99905	99913	99920	99926	99932	99937
450	99942	99946	99951	99954	99958	99961	99964	99967	99970	99972
0,500	99974	99976	99978	99980	99981	99983	99984	99985	99986	99987
550	99988	99989	99990	99991	99992	99992	99993	99993	99994	99994
600	99995	99995	99996	99996	99996	99997	99997	99997	99997	99997

Таблица 9

Критерий ω^2 независимости двух случайных величин

x	Δx									
	000	001	002	003	004	005	006	007	008	009
0,000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00006	00059	00286
010	00901	02121	04080	06797	10187	14108	18396	22894	27468	32010
020	36440	40701	44758	48588	52183	55541	58667	61569	64259	66748
030	69051	71180	73147	74966	76648	78203	79643	80976	82212	83358
040	84421	85408	86326	87180	87974	88714	89404	90047	90647	91208
0,050	91733	92223	92681	93111	93513	93890	94243	94575	94886	95178
060	95453	95711	95953	96181	96396	96597	96787	96966	97134	97293
070	97442	97583	97716	97841	97959	98071	98176	98275	98368	98457
080	98540	98619	98693	98763	98830	98893	98952	99008	99061	99111
090	99158	99203	99245	99285	99323	99359	99393	99425	99455	99484

x	Δx									
	000	002	004	006	008	010	012	014	016	018
0,100	99511	99561	99606	99646	99682	99714	99743	99769	99792	99813
120	99832	99849	99864	99878	99890	99901	99911	99920	99928	99935
140	99941	99947	99952	99957	99961	99965	99969	99972	99975	99977
160	99979	99981	99983	99985	99986	99988	99989	99990	99991	99992
180	99993	99993	99994	99995	99995	99996	99996	99996	99997	99997

Таблица 10

Критерий ω^2 независимости трех случайных величин
($b = \sqrt{270}$)

x	Δx									
	000	002	004	006	008	010	012	014	016	018
0,000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000
020	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000
040	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000
060	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00001	00003
080	00007	00016	00031	00057	00101	00170	00274	00424	00633	00915
0,100	01285	01757	02343	03057	03907	04902	06045	07340	08784	10375
120	12106	13969	15954	18048	20240	22515	24860	27260	29702	32172
140	34657	37145	39626	42087	44521	46919	49273	51578	53827	56016
160	58142	60202	62193	64113	65963	67741	69447	71082	72646	74141
180	75567	76927	78222	79454	80625	81737	82792	83792	84739	85635

Таблица 10 (продолжение)

x	Δx									
	000	002	004	006	008	010	012	014	016	018
0,200	86484	87285	88043	88758	89433	90070	90671	91237	91771	92273
220	92746	93191	93610	94003	94374	94722	95049	95356	95645	95916
240	96171	96410	96634	96845	97043	97228	97402	97565	97718	97861
260	97996	98122	98240	98351	98455	98552	98644	98729	98809	98884
280	98955	99020	99082	99140	99194	99245	99293	99337	99379	99418

x	Δx									
	000	004	008	012	016	020	024	028	032	036
0,300	99455	99521	99580	99631	99676	99715	99750	99780	99807	99830
340	99851	99869	99885	99898	99911	99921	99931	99939	99946	99953
380	99959	99963	99968	99972	99975	99978	99981	99983	99985	99987
420	99988	99990	99991	99992	99993	99994	99995	99995	99996	99996
460	99997	99997	99997	99998	99998	99998	99998	99999	99999	99999

Таблица 11
Критерий Ватсона U^2

x	Δx									
	000	002	004	006	008	010	012	014	016	018
0,000	00000	00000	00000	00000	00000	00003	00022	00089	00255	00578
020	01089	01833	02818	04041	05490	07142	08972	10953	13056	15256
040	17528	19851	22204	24570	26937	29290	31620	33918	36178	38393
060	40559	42673	44732	46735	48680	50567	52395	54165	55877	57532
080	59130	60674	62163	63599	64984	66319	67605	68844	70037	71186
0,100	72292	73357	74381	75367	76316	77228	78106	78950	79763	80544
120	81295	82017	82712	83380	84022	84640	85234	85805	86354	86881
140	87389	87877	88346	88797	89230	89647	90047	90433	90803	91159
160	91501	91830	92146	92450	92742	93023	93293	93553	93801	94042
180	94273	94494	94708	94912	95109	95299	95481	95656	95824	95985
0,200	96141	96290	96434	96572	96705	96832	96955	97073	97186	97295
220	97400	97500	97597	97690	97779	97865	97948	98027	98104	98177
240	98248	98316	98381	98443	98504	98562	98617	98671	98722	98772
260	98819	98865	98909	98951	98992	99031	99068	99104	99139	99172
280	99204	99235	99265	99293	99321	99347	99372	99396	99420	99442

x	Δx									
	000	005	010	015	020	025	030	035	040	045
0,300	99464	99514	99560	99601	99639	99673	99703	99731	99757	99779
350	99800	99819	99836	99851	99865	99878	99889	99900	99909	99918
400	99926	99933	99939	99945	99950	99955	99959	99963	99966	99969
450	99972	99975	99977	99979	99981	99983	99985	99986	99987	99989
500	99990	99991	99992	99992	99993	99994	99994	99995	99995	99996

Таблица 12

Квантили критериев ω^2

p	0,90	0,95	0,99	0,995	0,999
1 Критерий Смирнова W^2	0,3473	0,4614	0,7435	0,8694	1,1679
2. Критерий Андерсона — Дарлинга A^2	1,933	2,492	3,878	4,498	5,969
3. Критерий ω^2 нормальности при неизвестном математическом ожидании	0,1344	0,1653	0,2380	0,2698	0,3443
4. Критерий ω^2 нормальности при неизвестной дисперсии	0,3270	0,4418	0,7245	0,8506	1,149
5. Критерий ω^2 нормальности при неизвестных математическом ожидании и дисперсии	0,1035	0,1260	0,1788	0,2018	0,2559
6. Критерий ω^2 симметрии	1,196	1,656	2,787	3,292	4,486
7. Критерий ω^2 равномерности распределения в единичном квадрате	0,2553	0,3261	0,5017	0,5802	0,7663
8. Критерий ω^2 равномерности распределения в единичном кубе	0,1489	0,1860	0,2779	0,3191	0,4166
9. Критерий ω^2 независимости двух случайных величин	0,0469	0,0584	0,0869	0,0995	0,1298
10. Критерий ω^2 независимости трех случайных величин ($b=\sqrt{270}$)	0,2098	0,2317	0,2814	0,3027	0,3525
11. Критерий Ватсона U^2	0,1518	0,1869	0,2684	0,3035	0,3851
12 Критерий ω^2 экспоненциальности при неизвестном математическом ожидании	0,1288	0,1587	0,2299	—	—

Примечание. В таблице 12 приведены значения x такие, что $P\{\omega^2 < x\} = p$.

- Айне (Ajne B.)
 (1968) A simple test for uniformity of a circular distribution, *Biometrika* 55, 343—354.
- Андерсон (Anderson T. W.)
 (1962) On the distribution of the two-sample Cramér — von Mises criterion, *Ann. Math. Statist.* 33, 1148—1159.
- Андерсон, Дарлинг (Anderson T. W., Darling D. A.)
 (1952) Asymptotic theory of certain «goodness-of-fit» criteria based on stochastic process, *Ann. Math. Statist.* 23, 193—212.
 (1954) A test for goodness-of-fit, *J. Amer. Statist. Assoc.* 49, 765—769.
- Барр (Burr E. J.)
 (1963) Distribution of the two-sample Cramér — von Mises criterion for small equal samples, *Ann. Math. Statist.* 34, 95—101.
 (1964) Small-sample distributions of the two-sample Cramér — von Mises W^2 and Watson's U^2 , *Ann. Math. Statist.* 35, 1091—1098.
- Барра Ж.-Р.
 (1974) Основные понятия математической статистики, «Мир», М.
- Беран (Beran R. J.)
 (1968) Testing uniformity on a compact homogeneous space, *J. Appl. Probability* 5, 177—195.
 (1969) Asymptotic theory of a class of tests for uniformity of a circular distribution, *Ann. Math. Statist.* 40, 1196—1206.
- Блум, Кифер, Розенблатт (Blum J. R., Kiefer J., Rosenblatt M.)
 (1961) Distribution free tests of independence based on the sample distribution function, *Ann. Math. Statist.* 32, 485—498.
- Бокс (Box G. E. P.)
 (1954) Some theorems on quadratic forms applied in the study of analysis variance problems, I. Effect of inequality of variance in the one way classification, *Ann. Math. Statist.* 25, 290—302.
- Большев Л. Н., Смирнов Н. В.
 (1965) Таблицы математической статистики, «Наука», М.

Боровских Ю. В.

(1976) Асимптотический анализ в гильбертовом пространстве и некоторые задачи математической статистики, ДАН 228, 3 521—524.

Варберг (Varberg D. E.)

(1968) Almost sure convergence of quadratic forms in independent random variables, Ann. Math. Statist. 39, 1052—1506.

Ватанабе (Watanabe Y.)

(1952) On the ω^2 distribution, J. Gokugei Coll. Tokushima Univ. 2, 21—30.

Ватсон (Watson G. S.)

(1961) Goodness-of-fit on a circle. Biometrika 48, 109—114.

(1962) Goodness-of-fit on a circle. II, Biometrika 49, 57—63.

(1967) Another test for uniformity of a circular distribution, Biometrika 54, 675—677.

(1967a) Some problems in the statistics of directions, Bull. of the 36th session of the Int. Statist. Inst., 374—384, Sydney, Australia.

Вегнер (Wegner L. H.)

(1956) Properties of some two-sample tests based on a particular measure of discrepancy, Ann. Math. Statist. 27, 1006—1016.

Гёфдинг (Hoeffding W.)

(1948) A non-parametric test of independence, Ann. Math. Statist. 19, 546—557.

(1964) Об одной теореме В. М. Золотарева, Теор. вероятн. и ее примен., IX, 96—99.

Гидеон, Герланд (Gideon R. A., Gurland J.)

(1976) Series expansions for quadratic forms in normal variables, J. Amer. Statist. Assoc. 71, 227—232.

Гихман И. И.

(1954) Про одне питання з теорії ω^2 -критерія, Матем. збірник Київськ. держ. ун-ту, 5, 51—59.

Гомеш, Баррозо, Амарал (M. Ivette Gomes, Helena M. Barroso, M. Antonia Amaral)

(1975) Etude expérimentale de tests d'ajustement, Rev. de Stat. Appl., XXIII, 2, 5—18.

Грин, Херази (Green J. R., Hegazy Y. A. S.)

(1976) Powerful modified-EDF goodness-of-fit ests. J. Amer. Statist. Assoc. 71, 204—209.

Гред, Соломон (Grad A., Solomon H.)

(1955) Distribution of quadratic forms and some applications, Ann. Math. Statist. 26, 464—477.

Дарлинг (Darling D. A.)

(1953) The Cramér — Smirnov test in the parametric case, Ann. Math. Statist. 24, 493.

(1955) The Cramér — Smirnov test in the parametric case, Ann. Math. Statist. 26, 1—20.

(1957) The Kolmogorow — Smirnov, Cramér — von Mises tests, Ann. Math. Statist. 28, 823—838.

(1960) Sur les théorèmes de Kolmogorov — Smirnov, Теор. вероятн. и ее примен., V, 4, 393—398.

- Дёрбин (Durbin J.)
 (1970) Asymptotic distributions of some statistics based on the bivariate sample distribution function, *Nonparametric Techniques in Statistical Inference*, M. L. Puri, ed, Cambridge University Press, London, 435—449.
- (1973) Weak convergence of the sample distribution function when parameters are estimated, *Ann. Statist.* **1**, 279—290.
- (1973a) Distribution theory for tests based on the sample distribution function, Philadelphia: S. I. A. M
- (1976) Kolmogorov — Smirnov tests when parameters are estimated, *Lect. Notes Math.* **566**, 33—44.
- Дёрбин, Нотт (Durbin J., Knott M.)
 (1972) Components of Cramér — von Mises Statistics I, *J. R. Statist. Soc.* **B34**, 290—307.
- Дёрбин, Нотт, Тейлор (Durbin J., Knott M., Taylor C. C.)
 (1975) Components of Cramér — von Mises Statistics II, *J. Roy. Statist. Soc.* **B37**, 216—237.
- Диксон (Dixon W. J.)
 (1940) A criterion for testing the hypothesis that two samples are from the same population, *Ann. Math. Statist.* **11**, 199—204.
- Дюге (Dugué D.)
 (1968) Fonction caractéristique du ω^2 multidimensionnel de von Mises. Fonctions caractéristiques bidimensionnelles liées au mouvement brownien, *C. R. Acad. Sci.*, N 16, A834—A836.
- (1969) Characteristic functions of random variables connected with Brownian motion and of the von Mises multidimensional ω_n^2 , *Multivariate Analysis*, vol. **2**. Edited by P. R. Krishnaiah, New York: Academic Press.
- (1975) Sur des tests d'indépendance «indépendants de la loi», *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. **281**, Série A, 1103—1104.
- Жинё (Giné M. Evarist)
 (1975) Invariant tests for uniformity on compact Riemannian manifolds based on Sobolev norms, *Ann. Statist.* **3**, 1243—1266.
- Закс Ш.
 (1975) Теория статистических выводов, «Мир», М.
- Ибрагимов И. А., Розанов Ю. А.
 (1970) Гауссовские случайные процессы, «Наука», М.
- Имгоф (Imhof J. P.)
 (1961) Computing the distribution of quadratic forms in normal variables, *Biometrika* **48**, 419—426.
- Камалов М. К.
 (1958) Распределение квадратичных форм в выборках из нормальной совокупности, Изд-во АН Узб. ССР, Ташкент.
- Канделак И. П., Сазонов В. В.
 (1964) К центральной предельной теореме для случайных элементов, принимающих значения из гильбертова пространства, *Теория вероятн. и ее примен.*, IX, 1, 43—52.

- Канторович Л. В., Крылов В. И.
(1962) Приближенные методы высшего анализа, Изд. 5-е, Физматгиз.
- Кац, Кифер, Волфовитц (Kac M., Kiefer J., Wolfowitz J.)
(1955) On tests of normality and other tests of goodness-of-fit based on distance methods, *Ann. Math. Statist.* **26**, 189—211.
- Кифер (Kiefer J.)
(1959) K -sample analogues of the Kolmogorov — Smirnov and Cramér — v. Mises tests. *Ann. Math. Statist.* **30**, 420—447.
- Козел, Грин (Koziol James A., Green Sylvan B.)
(1976) A Cramér — von Mises statistic for randomly censored data. *Biometrika* **63**, 465—474.
- Кокс Д., Льюис П.
(1969) Статистический анализ последовательностей событий, «Мир», М.
- Крамер (Cramér H.)
(1928) On the composition of elementary errors. Second paper: Statistical applications, *Skandinavisk Aktuarietidskrift* **11**, 141—180.
- Кривякова Э. Н.
(1976) О критерии Крамера — фон Мизеса — Смирнова в многомерном случае, Сб. «Мат. стат. и ее приложение», вып. 4, Томск, Томский ун-т, 14—28.
- Кривякова Э. Н., Мартынов Г. В., Тюрин Ю. Н.
(1977) О распределении статистики ω^2 в многомерном случае, Теория вероятн. и ее примен., XXII, 2, 415—420.
- Крылов В. Н., Шульгина Л. Т.
(1966) Справочная книга по численному интегрированию, «Наука», М.
- Куипер (Kuiper N. H.)
(1960) Tests concerning random points on a circle, *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A*, **63**, 38—47.
- Леман (Lehmann E. L.)
(1951) Consistency and unbiasedness of certain nonparametric tests, *Ann. Math. Statist.* **22**, 165—179.
- Лок, Спюррье (Locke Charles, Spurrier John D.)
(1976) The use of U -statistics for testing normality against nonsymmetric alternatives, *Biometrika* **63**, 143—147.
- Лоэв М.
(1962) Теория вероятностей, «ИЛ», М.
- Льюис (Lewis Peter A. W.)
(1961) Distribution of the Anderson — Darling statistic, *Ann. Math. Statist.* **32**, 1118—1124.
- Мааг (Maag U. R.)
(1966) A k -sample analogue of Watson's U^2 statistic, *Biometrika* **53**, 3—4, 579—583.
- Мак-Нейл (MacNeill Ian B.)
(1975) Modified Cramér — von Mises goodness-of-fit tests for spectral distribution functions, *Stochastics* **11**, 353—360.

М а н д е л ь б р о й т С.

(1973) Ряды Дирихле Принципы и методы, «Мир», М.

М а р д и а (M a r d i a K. V.)

(1972) Statistics of directional data, Academic Press, New York.

М а р к у ш е в и ч А. И.

(1950) Теория аналитических функций, «Гостехиздат», М.

М а р т ы н о в Г. В.

(1973) Вычисление предельных распределений статистик критериев нормальности типа ω^2 , Теория вероятн. и ее примен., XVIII, 3, 671—673.

(1975) Вычисление функций распределения квадратичных форм от нормальных случайных величин, Теория вероятн. и ее примен., XX, 4, 797—809.

(1976) Вычисление предельных распределений статистик критериев нормальности типа ω^2 , Теория вероятн. и ее примен., XXI, 1, 3—15.

(1976a) Программа для вычисления функций распределения квадратичных форм, в сб. «Численные методы математической статистики. Алгоритмы и программы», изд-во МГУ, 30—35.

(1977) Обобщение формулы Н. В. Смирнова, Теория вероятн. и ее примен., XXII, 3, 614—620.

М а р ш а л л (M a r s h a l l A. W.)

(1958) The small sample distribution of $n\omega_n^2$, Ann. Math. Statist. 29, 307—309.

М и з е с (v o n M i s e s R.)

(1931) Vorlesungen aus dem Gebiete der angewandten Mathematik, Bd. 1, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Leipzig, 316—335.

Н о й х а у з (N e u h a u s G.)

(1971) On weak convergence of stochastic processes with multi-dimensional time parameter, Ann. Math. Statist. 42, 1285—1295.

(1973) Zur Verteilungskonvergenz einiger Varianten der Cramér — von Mises — Statistik, Math. Operationsforschung and Statist. 4, 473—484.

(1974) Asymptotic properties of the Cramér — von Mises statistic when parameters are estimated, Proc. Prague Symp. Asymptotic Stat., Vol. 2, 1973, Prague, Charles Univ., 257—297.

(1976) Asymptotic power properties of the Cramér — von Mises test under contiguous alternatives, J. Multivariate Anal. 6, 1, 95—110.

Н о т т (K n o t t M.)

(1974) The distribution of the Cramér — von Mises statistic for small sample sizes, J. Roy. Statist. Soc. B36, 3, 430—438.

О р л о в А. И.

(1972) О проверке симметрии распределения, Теория вероятн. и ее примен., XVII, 2, 372—377.

(1974) Скорость сходимости распределения статистики Мизеса — Смирнова, Теория вероятн. и ее примен., XIX, 4, 766—786.

(1974a) Асимптотическое поведение статистик интегрального типа, ДАН 219, 4, 808—811.

- Петтит (Pettitt A. N.)
 (1976) A two-sample Anderson -- Darling rank statistic, *Biometrika* **63**, 161—168.
- (1976a) Cramér — von Mises statistics for testing normality with censored samples, *Biometrika* **63**, 475—481.
- Петтит, Стивенс (Pettitt A. N., Stephens M. A.)
 (1976) Modified Cramér — von Mises statistics for censored data, *Biometrika* **63**, 291—298.
- Пайк, Шорак (Pyke R., Shorack G.)
 (1968) Weak convergence of a two-sample empirical process and a new approach to Chernoff — Savage theorems, *Ann. Math. Statist.* **39**, 755—771.
- Пирсон (Pearson E. S.)
 (1963) Comparison of tests for randomness of points on a line, *Biometrika*, **50**, 315—323.
- Пирсон, Стивенс (Pearson E. S., Stephens M. A.)
 (1962) The goodness-of-fit tests based on W_n^2 and U_n^2 , *Biometrika* **49**, 397—402.
- Пирсон, Хартли (Pearson E. S., Hartley H. O.)
 (1972) *Biometrika tables for statisticians*, vol. **2**, Cambridge, Cambridge University Press.
- Прохоров Ю. В.
 (1956) Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей, *Теория вероятн. и ее примен.*, **1**, 2, 177—238.
- Рао (Rao R. C.)
 (1972) The Kolmogoroff, Cramér — von Mises chisquare statistics for goodness-of-fit tests in the parametric case, Abstract 133-6, *Bull. Inst. Math. Statist.*, **1**, 83.
- Розенблатт (Rosenblatt M.)
 (1952) Limit theorems associated with variants of the von Mises statistic, *Ann. Math. Statist.* **23**, 300.
- (1952a) Remarks on a multivariate transformation, *Ann. Math. Statist.* **23**, 470—472.
- (1952b) Limit theorems associated with variants of the von Mises statistic, *Ann. Math. Statist.* **23**, 617—623.
- (1975) A quadratic measure of deviation of two-dimensional density estimates and a test of independence, *Ann. Statist.* **3**, 1—14.
- Ротман (Rothman E.)
 (1971) Tests of coordinate independence for a bivariate sample on a torus, *Ann. Math. Statist.* **42**, 1962—1969.
- (1972) Tests for uniformity of a circular distribution, *Sankhyā*, ser. **A**, **34**, 23—32.
- Ротман, Вудруф (Rothman E. D., Woodroffe M.)
 (1972) A Cramér — von Mises statistic for testing symmetry, *Ann. Math. Statist.* **43**, 2035—2038.
- Сандрам (Sundrum R. M.)
 (1954) On Lehmann's two-sample tests, *Ann. Math. Statist.* **25**, 139—145.
- Смирнов Н. В. (Smirnov N. V.)
 (1936) Sur la distribution de ω^2 , *C. R. Acad. Sci., Paris*, vol. **202**, 449—452.

- (1937) О распределении ω^2 -критерия Мизеса, Матем. сб. **2**(44), 5, 973—993. (см. также Н. В. Смирнов, Теория вероятностей и математическая статистика, Избранные труды, М., «Наука», 1970, 60—78).
- (1949) О критерии Крамера — фон Мизеса, Успехи матем. наук (Новая серия) **4**, 4(32), 196—197.
- Смирнов Н. В., Дунин-Барковский И. В.
 (1969) Курс теории вероятностей и математической статистики для технических приложений, изд. 3-е, «Наука», М.
- Сривасан, Годдио (Srivasan R, Godio L. B.)
 (1974) A Cramér — von Mises type statistic for testing symmetry, Biometrika **61**, 196—198
- Стивенс (Stephens M. A.)
 (1963) The distribution of the goodness-of-fit statistic, U_n^2 . I, Biometrika **50**, 303—313.
 (1964) The distribution of the goodness-of-fit statistic, U_n^2 . II, Biometrika **51**, 3—4, 393—397.
 (1965) The goodness-of-fit statistic V_n : distribution and significance points, Biometrika **52**, 309—321.
 (1965a) Significance points for the two-sample statistic $U_{m,n}^2$, Biometrika **52**, 661—663.
 (1966) Statistics connected with the uniform distribution percentage points and application to testing for randomness of directions, Biometrika **53**, 235—240.
 (1969) A goodness-of-fit statistic for the circle, with some comparisons, Biometrika **56**, 161—168.
 (1970) Use of the Kolmogorov — Smirnov, Cramér — von Mises and related statistics without extensive tables, J. Roy. Statist. Soc., **B 32**, 115—122.
 (1974) Components of goodness-of-fit statistics, Ann. Inst. H. Poincaré, **B 10**, 1, 37—54.
 (1974a) EDF statistics for goodness-of-fit and some comparisons, J. Amer. Statist. Assoc. **69**, 730—737.
 (1976) Asymptotic results for goodness-of-fit statistics with unknown parameters. Ann. Statist. **4**, 357—369.
- Стивенс, Мааг (Stephens M, Maag U. R.)
 (1968) Further percentage points for W_n^2 , Biometrika **55**, 428—430
- Сукхатм (Sukhatme Shashikala)
 (1972) Fredholm determinant of a positive definite kernel of a special type and its application, Ann. Math. Statist. **43**, 1914—1926
- Тарасенко Ф. П., Шуленин В. П.
 (1974) Критерии согласия, «Тр. Сиб. физ.-техн. ин-та при Томск. ун-те», **60**, 3—69.
- Тикку (Tiku M. L.)
 (1965) Chi-square approximation for the distributions of goodness-of-fit statistics U_n^2 and W_n^2 , Biometrika **52**, 630—633.
- Фиш (Fisz M.)

- (1960) On a result by M. Rosenblatt concerning the von Mises — Smirnov test, *Ann Math Statist.* 31, 427—429
- Холландер (Hollander Myles)
- (1971) A nonparametric test for bivariate symmetry, *Biometrika*, 58, 203—212.
- Ченцов Н. Н.
- (1956) Слабая сходимость случайных процессов с траекториями без разрывов второго рода и так называемый «эвристический» подход к критериям согласия типа Колмогорова — Смирнова, *Теория вероятн. и ее примен.*, I, 1, 155—161.
- (1958) Обоснование статистических критериев методами теории случайных процессов, Канд. дисс., Матем. институт им. В. А. Стеклова АН СССР, Москва.
- Чепмен (Chapman D G)
- (1958) A comparative study of several one-sided goodness-of-fit tests, *Ann. Math. Statist.* 29, 655—674.
- Чёргёш (Csörgö S.)
- (1976) On an asymptotic expansion for the von Mises ω^2 statistic, *Acta Sci. Math.* 38, 1—2, 45—67.
- Чибисов Д. М.
- (1961) Об асимптотической мощности и эффективности критерия ω_n^2 , *ДАН СССР* 138, 2, 322—325.
- (1962) Исследование мощности некоторых непараметрических критериев, *Теория вероятн. и ее примен.*, VII, 3, 355—356.
- (1965) К исследованию асимптотической мощности критериев согласия при близких альтернативах, *Теория вероятн. и ее примен.*, X, 3, 460—478.
- Шapiro, Уилк (Shapiro S. S., Wilk M. B.)
- (1966) An analysis of variance test for normality (complete samples), *Biometrika* 52, 591—611.
- Шapiro, Уилк, Чен (Shapiro S. S., Wilk M. B., Chen H. J.)
- (1968) A comparative study of various tests for normality, *J. Amer. Statist. Assoc.*, 63, 1343—1372.

Геннадий Владимирович Мартынов

КРИТЕРИИ ОМЕГА-КВАДРАТ

М., 1978 г., 80 стр.

Редактор *М. М. Горячая*

Техн. редактор *Е. В. Морозова*

Корректоры *Е. А. Белицкая, Н. Д. Дорохова*

ИБ № 11002

Сдано в набор 06.10.77. Подписано к печати 23.03.78. Т-06564.

Бумага 84×108¹/₃₂, тип. № 2 Литературная гарнитура.

Высокая печать. Условн. печ. л. 4,2. Уч.-изд. л. 4,26.

Тираж 8000 экз. Заказ № 791. Цена книги 25 коп.

Издательство «Наука»

Главная редакция физико-математической литературы

117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Трудового Красного Знамени Ленинградская
типография № 2 имени Евгении Соколовой
Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета
Министров СССР по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли. 198052, Ленинград, Л-52,
Измайловский проспект, 29.

Цена 25 н.